Graphes (et réseaux sociaux)

G. Richomme
gwenael.richomme@univ-montp3.fr

Université Paul Valéry Montpellier 3
Licence AES parcours Misahs

cours 2013-2014 - Séance 1

Objectifs et programmes

Objectifs : donner aux étudiants les outils formels leur permettant d'analyser les réseaux rencontrés dans le domaine économique et social

Programme :

- vocabulaire de la théorie des graphes,
- propriétés topologiques et paramètres des graphes servant à modéliser les réseaux sociaux (connexité, densité, coefficient de clustering, diamètre...),
- algorithmes permettant de calculer ces paramètres

Compétences visées

- Modélisation de problèmes à l'aide de graphe.
- Résolution de problèmes se ramenant à l'aide d'algorithmes de graphes

Organisation

- 26h cours-TD
- Les aspects "programmation" seront vus en Projet.
- Pré-requis : niveau L2
- Supports de cours : en ligne

Modalités de contrôle des connaissances (1/2)

Contrôle continu pour la première session

- Coefficient 0,1 : notes de présentiel (présence obligatoire), participation et préparation des enseignements.
- Coefficient 0,9 : exercices et/ou questions de cours, sur table répartis sur plusieurs séances d'enseignement

Calendrier prévisionnel (voir site web à partir site Misashs) :

- Séance 4 : coeff. 0,1 ; 30 septembre
- Séance 7 : coeff. 0,2 ; 21 octobre
- Séance 10 : coeff. 0,3 ; 18 novembre
- Séance 13 : coeff. 0,3 ; 9 décembre

(0 si absence pour une évaluation)

Modalités de contrôle des connaissances (2/2)

Deuxième session.

- Examen sur table (ou sur machine) de 2h00.
- Note finale UE = max première et deuxième session

Réseaux sociaux ?

Réseaux sociaux ?

- Sociologie = "Sciences des structures des relations sociales" [Forsé 2002] d'après [Mercklé 2011]

Réseaux sociaux ?

- Sociologie = "Sciences des structures des relations sociales" [Forsé 2002] d'après [Mercklé 2011]
- Un "réseau social" peut-être vu comme : un ensemble d'individus (ou d'unités sociales) et un ensemble de relations entre eux (ou elles).
  - Concept ancien : G. Simmel [1858-1918], J. L. Moreno [1889-1974]
  - Terme = J. A. Barnes, anthropologue, 1954.

Réseaux sociaux ?

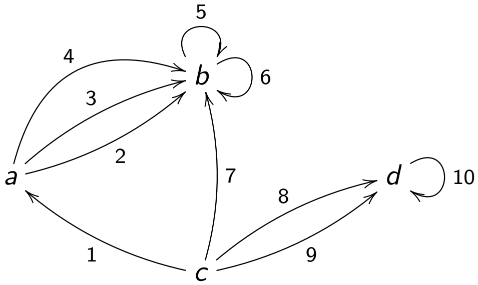
- Sociologie = "Sciences des structures des relations sociales" [Forsé 2002] d'après [Mercklé 2011]
- Un "réseau social" peut-être vu comme : un ensemble d'individus (ou d'unités sociales) et un ensemble de relations entre eux (ou elles).
  - Concept ancien : G. Simmel [1858-1918], J. L. Moreno [1889-1974]
  - Terme = J. A. Barnes, anthropologue, 1954.
- Analyse des réseaux sociaux :
  - un domaine actif de recherche en sciences humaines.
  - s'appuie sur théorie des graphes et algèbre linéaire.

Graphe ?

- Un outil mathématique [Théorie des graphes] utilisé dans de nombreux autres domaines comme outils de modélisation voire comme outils de décision
- Un objet d'étude en informatique [Algorithmique des graphes]

Graphe ?

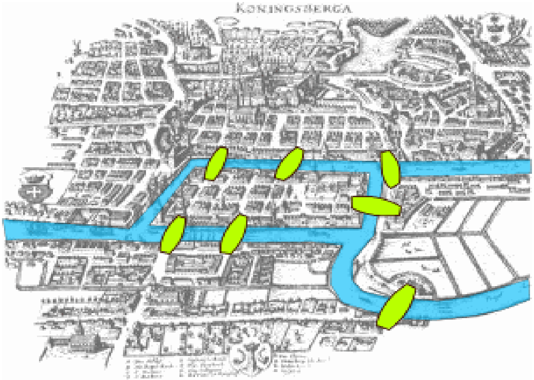
- Un outil mathématique [Théorie des graphes] utilisé dans de nombreux autres domaines comme outils de modélisation voire comme outils de décision
- Un objet d'étude en informatique [Algorithmique des graphes]
- Lien intuitif entre réseaux sociaux et graphes (dessin)
  - Individus = points (sommets)
  - Relations = flèches (arcs) ou ligne (arêtes) selon orientation ou non



D'autres exemples de modélisation.

L'exemple historique

Euler : les ponts de Kœnisberg



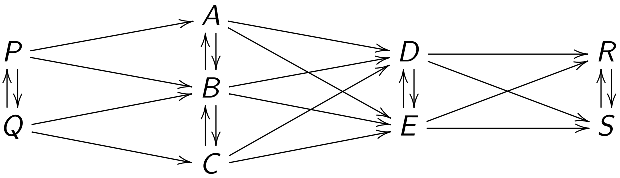
Source image = wikipedia commons (domaine public)

Physique, Chimie, Mathématiques, Web

- 1847 : Kirschoff, circuits électriques.
- 1857-1874 : Cayley, positions et liens entre atomes dans molécules.
- Coloriage de cartes : théorème des 4 couleurs pour les graphes planaires.
- Le web = 1 grand graphe de pages interconnectées.

Réseaux de transports

- P, Q : puits de pétrole
- A, B, C et D, E : ports
- R, S : raffinerie
- liaison de capacité limitée



Exemples de questions :

- capacité globale du réseau ?
- comment optimiser le transport ?
- ...

Problèmes d'affectation

- Chaque moyen ne peut être affecté qu'à une seule tâche.
- Chaque tâche n'a besoin que d'un seul moyen à un moment donné.

Comment optimiser ?

Exemple = emplois du temps

- Moyen = salles de TDs d'effectifs différents
- Tâche = groupe avec des effectifs attendus

$\Rightarrow$ Graphes bipartis

Problèmes d'affectation

- Chaque moyen ne peut être affecté qu'à une seule tâche.
- Chaque tâche n'a besoin que d'un seul moyen à un moment donné.

Comment optimiser ?

Exemple = emplois du temps

- Moyen = salles de TDs d'effectifs différents
- Tâche = groupe avec des effectifs attendus

$\Rightarrow$ Graphes bipartis

Et si on ajoute les contraintes des enseignants ?

Ordonnancement

Exemple, problèmes de planning : dans un chantier, dans un atelier, dans un projet, certaines tâches peuvent être faites en parallèle, d'autre doivent être faites séquentiellement.

- Sommets = tâches à exécuter
- A chaque tâche, est associée une durée ?
- Les arcs précisent l'ordre des tâches.

Etc...

Petits mondes

- 1967, expérience de Milgram : origine de l'hypothèse des six degrés de séparation
- 1998, Watts et Strogatz : graphes petit-monde, différents des graphes aléatoires, plus proches des graphes réels
- De nombreuses autres expériences confortant les graphes petit-monde, et de nombreuses autres études :
  - graphes d'acteurs avec relation "ayant joué dans le même film",
  - graphes de co-rédaction d'articles entre mathématiciens,
  - graphes de messagerie instantanée, twitter ou facebook,
  - ...

Quelques lectures (les articles se trouvent sur internet)

Pierre Mercklé
Sociologie des réseaux sociaux,
Collection Repères, édition La Découverte, 2011.

M. Forsé
Les réseaux sociaux d'aujourd'hui
Revue de l'OFCE/Débats et politiques 126, 155-169 (2012).

J.P. Delahaye
Que le monde est petit !
Pour la science 308, 98-103 (2003).

D. J. Watts, S. H. Strogatz
Collective dynamics of 'small-word' networks
Nature 393, 440-442 (1998).

M. E. J. Newmann
The structure and function of complex networks, 2003
SIAM Review 45, 167-256 (2003).

Modélisation réseau social

Réseau social

Ensemble d'individus reliés par une propriété :

- un individu n'est pas en relation avec lui-même
- (relation symétrique)
  si A est en relation avec B alors B est en relation avec A
- entre deux individus : au plus une relation

$\Rightarrow$ modélisation par un graphe non orienté simple (fini)

- *sommets* du graphe = individus
- *arêtes* du graphe = paires $\{A, B\}$ où A et B sont en relation ($A \neq B$)

Avertissement

Dans le cadre, tous les graphes considérés sont **finis**, *i.e.* ensemble **fini** de sommets (et d'arêtes ou arcs)

Par souci de simplicité le mot fini sera systématiquement oublié.

Graphes non orientés simples

Définition

Un *graphe non orienté simple* $G = (S, A)$ est la donnée d'un ensemble S et d'un ensemble A de paires d'éléments de S.

- Les éléments de S sont appelés les *sommets* de G.
- Les éléments de A sont appelés les *arêtes* de G.

Rappel :

- Paire = ensemble de deux éléments différents
  Notation : $\{x, y\}$ $(x \neq y)$
- $\{x, y\} = \{y, x\}$
- Dessin de graphe : convention usuelle
  (sommet = point, arête = trait entre sommets)

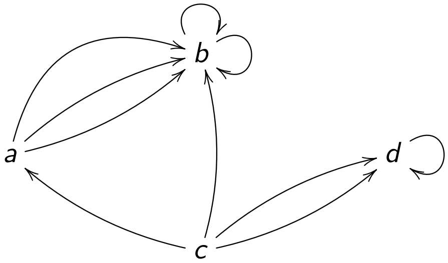
Autres types de graphes

Dans la suite du cours, nous verrons aussi :

- les graphes orientés simples
- les graphes orientés ou non simples valués
  Ces derniers permettent de simuler les graphes avec arcs/arêtes multiples.

Exercice

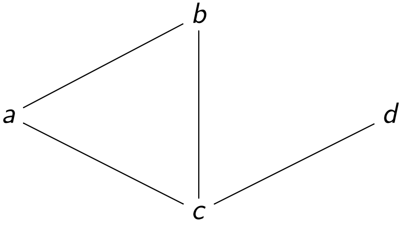
Est-ce que le graphe suivant est un graphe non orienté simple ?



Si non, qu'enlever au minimum pour qu'il le devienne ?
Pour le graphe alors obtenu, donner sa définition formelle.

Réponse

Exemple $S = \{a, b, c, d\}$
$A = \{\ [a, b], [c, a], [c, b], [c, d]\}$



Exercice

Dessinez les graphes $G_1 = (A_1, S_1)$, $G_2 = (A_2, S_2)$, $G_3 = (A_3, S_3)$, définis par :

- $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- $A_1 = \{\{x, y\} \mid (x, y) \in \{1, 2, 3\} \times \{4, 5\}\}$;

- $S_2 = \{1, 2, 3, 4\}$;
- $A_2 = \{\{x, y\} \mid x, y \in S_2, x \neq y\}$;

- $S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- $A_3 = \{\{x, y\} \mid x, y \in S_2, x \neq y\}$.

Exercice

Dessinez les graphes $G_1 = (A_1, S_1)$, $G_2 = (A_2, S_2)$, $G_3 = (A_3, S_3)$, définis par :

- $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- $A_1 = \{\{x, y\} \mid (x, y) \in \{1, 2, 3\} \times \{4, 5\}\}$;

- $S_2 = \{1, 2, 3, 4\}$;
- $A_2 = \{\{x, y\} \mid x, y \in S_2, x \neq y\}$;

- $S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- $A_3 = \{\{x, y\} \mid x, y \in S_2, x \neq y\}$.

Graphes complets

Définition

Un graphe non orienté simple est *complet* si pour tous sommets différents x, y, il existe une arête entre x et y dans G.

Le graphe non orienté simple à n sommets est noté K_n.

Chaines dans un graphe non orienté

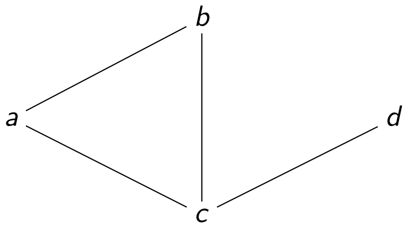
Définition

Une *chaîne* de longueur k dans un graphe non orienté $G = (S, A)$ est une suite de $k + 1$ sommets $(s_0, \ldots, s_k)$ tels que $\{s_i, s_{i+1}\}$ est une arête de G pour tout i de 0 à $k - 1$.

Chaines dans un graphe non orienté

Définition

Une *chaîne* de longueur k dans un graphe non orienté $G = (S, A)$ est une suite de $k+1$ sommets $(s_0, \ldots, s_k)$ tels que $\{s_i, s_{i+1}\}$ est une arête de G pour tout i de 0 à $k-1$.



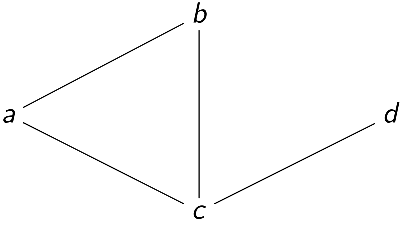
Exemples de chaînes dans ce graphe :

(c, a, b, b)

Chaines dans un graphe non orienté

Définition

Une *chaîne* de longueur k dans un graphe non orienté $G = (S, A)$ est une suite de $k+1$ sommets $(s_0, \ldots, s_k)$ tels que $\{s_i, s_{i+1}\}$ est une arête de G pour tout i de 0 à $k-1$.



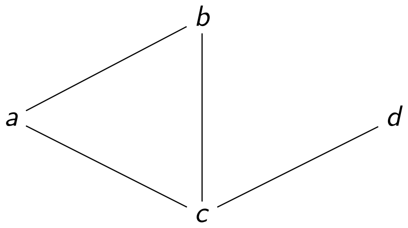
Exemples de chaînes dans ce graphe :

~~(c, a, b, b)~~

Chaines dans un graphe non orienté

Définition

Une *chaîne* de longueur k dans un graphe non orienté $G = (S, A)$ est une suite de $k+1$ sommets $(s_0, \ldots, s_k)$ tels que $\{s_i, s_{i+1}\}$ est une arête de G pour tout i de 0 à $k-1$.



Exemples de chaînes dans ce graphe :

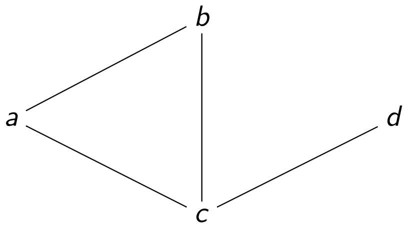
~~(c, a, b, b)~~

(a, b, c, d)

Chaines dans un graphe non orienté

Définition

Une *chaîne* de longueur k dans un graphe non orienté $G = (S, A)$ est une suite de $k + 1$ sommets $(s_0, \ldots, s_k)$ tels que $\{s_i, s_{i+1}\}$ est une arête de G pour tout i de 0 à $k - 1$.



Exemples de chaînes dans ce graphe :

~~(c, a, b, b)~~

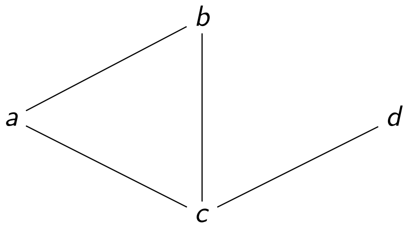
(a, b, c, d)

(a, b, d)

Chaines dans un graphe non orienté

Définition

Une *chaîne* de longueur k dans un graphe non orienté $G = (S, A)$ est une suite de $k + 1$ sommets $(s_0, \ldots, s_k)$ tels que $\{s_i, s_{i+1}\}$ est une arête de G pour tout i de 0 à $k - 1$.



Exemples de chaînes dans ce graphe :

~~(c, a, b, b)~~

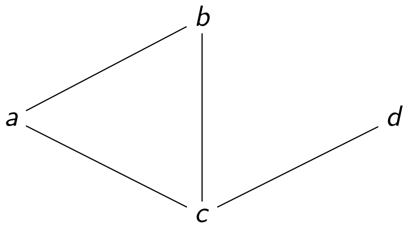
(a, b, c, d)

~~(a, b, d)~~

Chaines dans un graphe non orienté

Définition

Une *chaîne* de longueur k dans un graphe non orienté $G = (S, A)$ est une suite de $k+1$ sommets $(s_0, \ldots, s_k)$ tels que $\{s_i, s_{i+1}\}$ est une arête de G pour tout i de 0 à $k-1$.



Exemples de chaînes dans ce graphe :

$\cancel{(c, a, b, b)}$

(a, b, c, d)

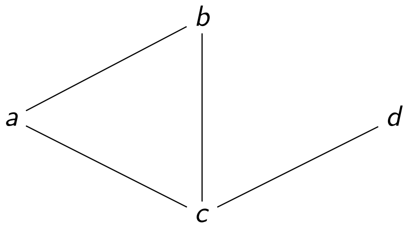
$\cancel{(a, b, d)}$

(c)

Chaines dans un graphe non orienté

Définition

Une *chaîne* de longueur k dans un graphe non orienté $G = (S, A)$ est une suite de $k + 1$ sommets $(s_0, \ldots, s_k)$ tels que $\{s_i, s_{i+1}\}$ est une arête de G pour tout i de 0 à $k - 1$.



Exemples de chaînes dans ce graphe :

~~(c, a, b, b)~~

(a, b, c, d)

~~(a, b, d)~~

(c)

(a, b, c, d, c, b, a, c)

Vocabulaire

Définitions

Soit $C = (s_0, \ldots, s_k)$ une chaîne dans un graphe non orienté

- C est *élémentaire* si les s_i sont deux à deux différents.

Vocabulaire

Définitions

Soit $C = (s_0, \ldots, s_k)$ une chaîne dans un graphe non orienté

- C est *élémentaire* si les s_i sont deux à deux différents.
- C est *simple* si les arêtes $\{s_i, s_{i+1}\}$ sont deux à deux différentes.

Vocabulaire

Définitions

Soit $C = (s_0, \dots, s_k)$ une chaîne dans un graphe non orienté

- C est *élémentaire* si les s_i sont deux à deux différents.
- C est *simple* si les arêtes $\{s_i, s_{i+1}\}$ sont deux à deux différentes.
- C est *fermée* si $s_0 = s_k$.

Vocabulaire

Définitions

Soit $C = (s_0, \ldots, s_k)$ une chaîne dans un graphe non orienté

- C est *élémentaire* si les s_i sont deux à deux différents.
- C est *simple* si les arêtes $\{s_i, s_{i+1}\}$ sont deux à deux différentes.
- C est *fermée* si $s_0 = s_k$.
- C est un *cycle* si $k > 0$, C est fermé(e) et simple ($\rightarrow k \geq 3$)

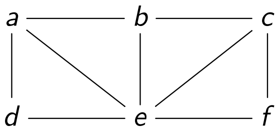
Vocabulaire

Définitions

Soit $C = (s_0, \dots, s_k)$ une chaîne dans un graphe non orienté

- C est *élémentaire* si les s_i sont deux à deux différents.
- C est *simple* si les arêtes $\{s_i, s_{i+1}\}$ sont deux à deux différentes.
- C est *fermée* si $s_0 = s_k$.
- C est un *cycle* si $k > 0$, C est fermé(e) et simple ($\rightarrow k \geq 3$)
- C est un *cycle élémentaire* si C est un cycle et les s_i sont deux à deux distincts (sauf $s_0 = s_k$).

Exercice



1. Donnez le nombre de chaînes existant entre a et e ?
2. Idem entre b et f ?
3. Donnez le nombre de chaînes *élémentaires* existant entre a et e ?
4. Idem entre b et f ?

Diamètre d'un graphe

Définition

Le diamètre d'un graphe non orienté simple G est la longueur maximale d'une plus petite chaîne entre 2 sommets différents.

Exemple :

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & b \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & c \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\
d \arrow[r, dash] & e \arrow[r, dash] & f
\end{tikzcd}$$

Vocabulaire

Voisin

Un sommet x est dit voisin d'un sommet y s'il existe une arête entre x et y.

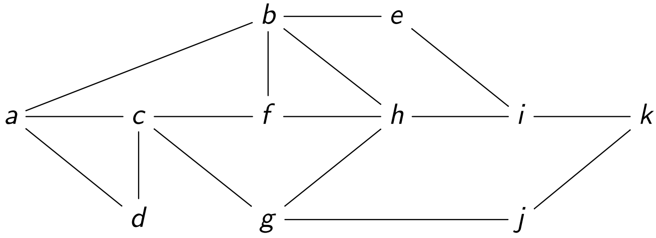
Principe général calcul diamètre

Pour chaque sommet x de G faire

calculer les longueurs des plus petites chaines issues de x

Le diamètre est le max de toutes les longueurs

Exemple 2



Pré-version calcul longueurs plus courtes chaînes

```
fonction longueurs_plus_courtes_chaines_issues_sommet( G, x) :
# Retourne un tableau recensant les longueurs des plus courtes
#         chaînes issues de x dans G
    Initialiser F à la file vide
    lpcc[x] = 0
    enfiler x dans F
    tant que F n'est pas vide faire
        y = élément défilé de F
        pour chaque voisin z de y faire
            si lpcc[z] non défini faire
                lpcc[z] = lpcc[y] + 1
                enfiler z dans F
    retourner lpcc
```

Déterminisme ?

Ordre de parcours des voisins ?

- on supposera unique car lié à la représentation en mémoire du graphe.
- dans les exercices, quand l'ordre ne sera pas précisé, on considérera les voisins dans l'ordre numérique ou dans l'ordre alphabétique (selon les noms des sommets).

File

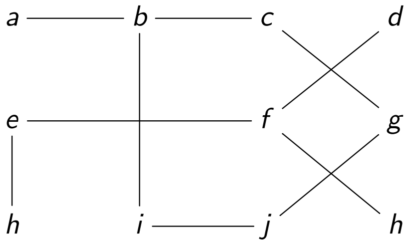
File - structure FIFO (First In First Out)

Structure de données pour laquelle les opérations suivantes sont permises :

- Initialisation à la file vide
- Tester si la file est vide
- Enfiler un élément
- Défiler un élément : l'élément défilé est l'élément le plus anciennement inséré (enfilé) dans la file

Exemple 3

Exemple :



Pour séance prochaine, calculer les longueurs des plus courtes chaînes issues du sommet i, en utilisant l'algorithme du cours et en montrant l'ordre dans lequel les sommets ont été enfilés.