Notes de Cours

Mathématiques

M1 MRHDS

2011-2012

Laurent Piccinini

version du 5 octobre 2011.

Table des matières

Chapitre I

Les suites numériques

I.1 Généralités

1.1 Définitions

Définition : Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$. La notation $(u_n)_n$ désigne la suite en tant qu'objet mathématique et u_n désigne l'image[1] de l'entier n, appelé terme d'indice n de la suite $(u_n)_n$.

Exemple : Considérons, avec les notations usuelles des fonctions, $f(x) = 2x^2 - 1$. Alors, on peut définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en posant $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les premiers termes de la suite sont alors : $u_0 = -1$, $u_1 = 2 - 1 = 1$, $u_2 = 8 - 1 = 7$, $u_3 = 18 - 1 = 17, \ldots$

Exemple : Une suite peut être définie par récurrence lorsqu'on connaît son premier terme et une relation de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n, où f désigne une fonction. Par exemple, avec $f(x) = 2x^2-1$ et $u_0 = 0$, on a : $u_1 = -1$, $u_2 = 2 \times (-1)^2 - 1 = 1$, $u_3 = 2 \times (1)^2 - 1 = 1, \ldots$

Remarque : Certaines suites ne sont définies qu'à partir d'un certain rang, comme par exemple : $u_n = \frac{1}{n}$ définie pour $n \geq 1$ ou $v_n = \sqrt{n-3}$ définie pour $n \geq 3$.

Définition : Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même. La suite $(u_{\varphi(n)})_n$ est appelée sous-suite ou suite extraite de la suite $(u_n)_n$.

Exemple : Si $\varphi(n) = 2n$, alors $v_n = u_{\varphi(n)} = u_{2n}$ est le $n$ième terme de la sous-suite formée des termes d'indice pair. Par exemple, si $u_n = \frac{1}{n}$ (ses premiers termes sont : 1 ; $0,5$; $1/3$; $0,25$; $0,2$; ...) alors $v_n = u_{\varphi(n)} = u_{2n}$ a pour premiers termes : $v_1 = u_2 = 0,5$, $v_2 = u_4 = 0,25$, $v_3 = u_6 = 1/6, \ldots$

1. que l'on pourrait noter $u(n)$.

1.2 Monotonie d'une suite

Définition : Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. On dit que :

1. La suite $(u_n)_n$ est croissante (à partir du rang n_0) lorsque $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier $n \geq n_0$.
2. La suite $(u_n)_n$ est strictement croissante (à partir du rang n_0) lorsque $u_n < u_{n+1}$ pour tout entier $n \geq n_0$.
3. La suite $(u_n)_n$ est décroissante (à partir du rang n_0) lorsque $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout entier $n \geq n_0$.
4. La suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante (à partir du rang n_0) lorsque $u_n > u_{n+1}$ pour tout entier $n \geq n_0$.
5. La suite $(u_n)_n$ est monotone (à partir du rang n_0) si elle est croissante ou décroissante à partir du rang n_0.
6. La suite $(u_n)_n$ est stationnaire s'il existe un entier n_0 tel que $u_n = u_{n+1}$ pour tout entier $n \geq n_0$.
7. La suite $(u_n)_n$ est constante lorsque $u_n = u_{n+1}$ pour tout entier n du domaine de définition de $(u_n)_n$.

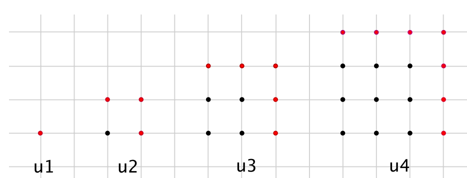
Plusieurs techniques peuvent alors être mise en œuvre selon la suite :

1. $u_n = f(n)$:
   (a) on peut étudier la fonction f (tableau de variations).
   (b) on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
   (c) on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.
2. $u_{n+1} = f(u_n)$ (suite récurrente) :
   (a) on peut étudier la fonction f.
   (b) on peut faire un raisonnement par récurrence.

Exemples :

1. Soit $u_n = \sqrt{1+n}$. Alors $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{1+x}$. Pour $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$ donc f est croissante [i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$, on a $f(x) \leq f(y)$], donc en particulier, la suite $(u_n)_n$ est croissante.
2. Soit $u_n = 2^n/(8n)$ pour $n \geq 1$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{8n}{8n+8} = 2\frac{8n}{8n+8}$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Leftrightarrow 2\frac{8n}{8n+8} \geq 1 \Leftrightarrow 16n \geq 8n+8 \Leftrightarrow 8n \geq 8 \Leftrightarrow n \geq 1$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante. $\square$

1.3 Le raisonnement par récurrence



Les mathématiciens grecs du début de notre ère nommaient « nombres carrés » la suite de nombres définis pour $n \geq 1$ par $u_n = n^2$. Ils représentaient ces nombres à l'aide des figures ci-contre. Ces représentations graphiques servaient de justification de la propriété : pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

Démonstration par récurrence

Soit une propriété dépendant d'un entier naturel n. Si :

1. la propriété est vraie au rang 0,
2. on suppose que la propriété est vraie pour un certain rang n, alors elle est vraie au rang $n+1$ (on dit que la propriété est héréditaire),

alors la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

Attention : les deux points sont nécessaires au raisonnement.
Si n est un entier naturel quelconque, P_n est la propriété « 6 divise $7^n + 1$ ».
Supposons cette propriété vraie à un certain rang n, c'est à dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $7^n + 1 = 6p$, alors $7^{n+1} + 1 = 7 \times 7^n + 1 = 7 \times (7^n + 1) - 7 + 1 = 7 \times 6p - 6 = 6(7p - 1)$, donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.
Cependant, la propriété n'est pas vraie pour $n = 0$, car $7^0 + 1 = 2$ n'est pas un multiple de 6, pas plus que $7^1 + 1 = 8$.
Donc la propriété est fausse.
On peut d'ailleurs montrer que la propriété est fausse pour tout entier naturel n.

Exemple : On peut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exemple : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n + 1},\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est-elle monotone ?

Solution : On peut d'abord démontrer par récurrence que, pour tout entier n, u_n est un réel strictement positif, ce qui justifie que la suite est bien définie sur $\mathbb{N}$:

1. $u_0 = 10 > 0$ et la propriété est vraie au rang 0.
2. Supposons la propriété vraie au rang n, c'est à dire $u_n > 0$. Alors $\sqrt{u_n + 1}$ existe et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n + 1} > 2\sqrt{1} > 0$. La propriété est ainsi vraie au rang $n + 1$.

Le calcul des premiers termes permet d'émettre la conjecture : la suite $(u_n)_n$ décroit.
On démontre ce résultat en utilisant un raisonnement par récurrence en considèrant la propriété $u_{n+1} \geq u_n$:

1. Pour $n = 0$, $u_0 = 10$ et $u_1 = 2\sqrt{11}$, ainsi $u_1 \leq u_0$ et la propriété est vraie au rang 0.
2. Supposons la propriété vraie au rang n, c'est à dire $u_{n+1} \leq u_n$ et montrons que $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction $f : x \longmapsto 2\sqrt{x+1}$ est strictement croissante ($f'(x) > 0$). Comme par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} \leq u_n$, on obtient $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$, c'est à dire $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ et la propriété est ainsi vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : La suite $(u_n)_n$ est bien définie et décroissante. □

1.4 Représentation graphique d'une suite définie par récurrence

Une suite est définie par récurrence lorsqu'on connaît son premier terme et une relation de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n, où f désigne une fonction. Comme nous l'avons vu dans l'exemple précédent, il convient d'émettre une conjecture sur le comportement de la suite avant de pouvoir effectuer la démonstration. Pour cela, on peut calculer les premiers termes. Une autre approche visuelle repose sur une représentation graphique.

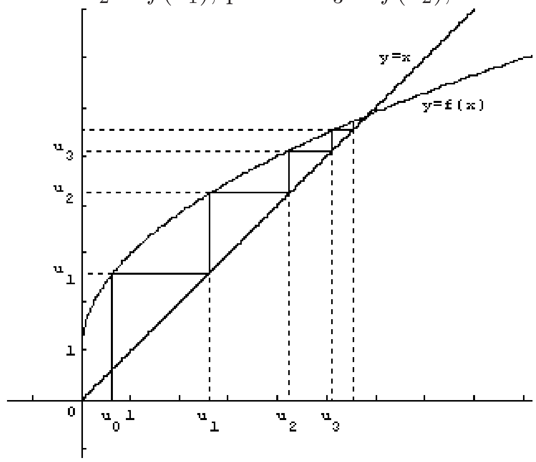
Exemple : Représentation des premiers termes de la suite $(u_n)_n$ définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,64 \\ \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + 2\sqrt{u_n} \end{cases}$$

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$ où f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$.
Pour représenter les premiers termes sur l'axe des abscisses, on place :
– sur l'axe des abscisses, le point d'abscisse u_0 ;

– sur la courbe $\mathcal{C}$, le point d'abscisse u_0 ; son ordonnée est $u_1 = f(u_0)$;
– sur la droite $\mathcal{D}$, le point d'ordonnée u_1 ; son abscisse est aussi u_1.

Ayant obtenu sur l'axe des abscisses un point d'abscisse u_1, il ne reste qu'à itérer la démarche : lecture et report sur l'axe des abscisses de $u_2 = f(u_1)$, puis de $u_3 = f(u_2)$, etc...



La lecture graphique donne des valeurs approchées des u_n, et elle permet d'émettre des conjectures concernant le comportement global et asymptotique de la suite. Elle semble croissante.

I.2 Comportement asymptotique

2.1 Suites convergentes

Définition :

1. On dit qu'une suite converge (ou admet une limite finie) lorsqu'il existe un réel ℓ tel que tout intervalle I centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors : $\ell = \lim u_n$.
2. Une suite non convergente est appelée suite divergente.

Exemple : Pour $u_n = \frac{1}{n}$, la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

Propriété 1 : Si $(u_n)_n$ converge alors sa limite est unique.

Propriété 2 : Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente vers la même limite.

Conséquence : Si il existe deux sous-suites qui ne convergent pas vers la même limite, la suite ne converge pas.

Exemple : Posons $u_n = (-1)^n$. Alors la sous-suite définie par $u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ converge vers 1 et la sous-suite définie par $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$ converge vers -1. Donc $(u_n)_n$ n'est pas convergente.

Définition : Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. On dit que :

1. La suite $(u_n)_n$ est majorée (à partir du rang n_0) si il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout entier $n \geq n_0$.

2. La suite $(u_n)_n$ est minorée (à partir du rang n_0) si il existe un réel m tel que $m \leq u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.
3. La suite $(u_n)_n$ est bornée (à partir du rang n_0) si elle est minorée et majorée (à partir du rang n_0).

Propriété 3 : Si $(u_n)_n$ converge alors $(u_n)_n$ est bornée.

2.2 Suites divergentes

Définition : Une suite est divergente si elle ne converge pas.

Définition : (suite divergente vers l'∞) On dit qu'une suite diverge vers $+\infty$ (resp $-\infty$) si, quel que soit le nombre A, tous les termes de la suite sont supérieurs (resp. inférieurs) à A à partir d'un certain rang. On note alors : $\lim u_n = +\infty$ (resp. $\lim u_n = -\infty$).

Exemple : Pour $u_n = n + 5$, la suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.
Pour $u_n = -\sqrt{n}$, la suite $(u_n)_n$ diverge vers $-\infty$.

2.3 Opérations sur les limites

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites qui admettent pour limite u et v (u et v étant réels) ou $\pm\infty$, donc étant soit convergente, soit divergente vers l'∞. Dans les tableaux suivants les ? signalent les cas indéterminés pour lesquels une étude spécifique permet de lever l'indétermination (à l'aide, le plus souvent, des développements limités, de résultats sur les croissances comparées des fonctions ou de quantité conjuguée).

Somme : $\lim(u_n + v_n)$

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	v	$+\infty$	$-\infty$
u	$u+v$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Produit : $\lim(u_n\, v_n)$

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	$-\infty$	$v < 0$	0	$v > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$u < 0$	$+\infty$	uv	0	uv	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$u > 0$	$-\infty$	uv	0	uv	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Quotient : $\lim(u_n/v_n)$

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	$-\infty$	$v<0$	0^-	0^+	$v>0$	$+\infty$
$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$u<0$	0	u/v	$+\infty$	$-\infty$	u/v	0
0	0	0	?	?	0	0
$u>0$	0	u/v	$-\infty$	$+\infty$	u/v	0
$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

Exemple : $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ est une forme indéterminée "$(+\infty)+(-\infty)$". A l'aide de la quantité conjuguée $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$, on obtient $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. C'est un quotient dont le numérateur est 1 (donc de limite 1) et dont le dénominateur tend vers $+\infty$ donc $\lim a_n = 0$.

I.3 Etude de la nature d'une suite

Déterminer la nature d'une suite, c'est déterminer si la suite est convergente ou divergente. Les suites arithmétiques et géométriques sont des suites particulières, intervenant naturellement dans des applications.

3.1 Suites géométriques, Suites arithmétiques

Propriété 4 : Soit $(u_n)_n$ une suite définie par : $u_n = q^n$ où $q \in \mathbb{R}$.

1. Si $q > 1$ alors $(u_n)_n$ est divergente vers $+\infty$.
2. Si $q = 1$ alors $(u_n)_n$ est constante égale à 1.
3. Si $-1 < q < 1$ alors $(u_n)_n$ est convergente vers 0.
4. Si $q \leq -1$ alors $(u_n)_n$ est divergente.

Remarque : La démonstration est une conséquence directe de l'*inégalité de Bernoulli* : Pour tout réel x positif et tout entier naturel n, on a : $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Définition : On appelle suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 la suite définie par la récurrence suivante : $\begin{cases} u_{n+1} = q\, u_n, \ n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in \mathbb{R} \text{ fixé} \end{cases}$

Propriété 5 : Soit $(u_n)_n$ une suite numérique, alors il y a équivalence entre les deux points suivants :

1. $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0\, q^n$

Démonstration :

1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0\, q^n$ alors on a bien que $u_{n+1} = u_0\, q^{n+1} = u_0\, q^n\, q = q\, u_n$, donc $(u_n)_n$ est bien une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
2. Réciproquement, si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, une récurrence simple permet de conclure. □

Propriété 6 : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0. On définit la suite $(v_n)_n$ dont le terme d'indice n est la somme des n premiers termes de $(u_n)_n$: $v_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ pour $n \geq 0$.

Alors

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}$.
2. La suite $(v_n)_n$ converge vers $u_0 \frac{1}{1-q}$ si et seulement si $-1 < q < 1$.

Démonstration : Le terme d'indice n de la suite est $v_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i = \sum_{i=0}^{n-1} u_0 \, q^i = u_0 \sum_{i=0}^{n-1} q^i$. Or $(1-q) \times \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \sum_{i=0}^{n-1} q^i - \sum_{i=0}^{n-1} q^{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} q^i - \sum_{i=1}^{n} q^i$. Les termes se simplifient alors deux à deux sauf q^0 et q^n : $\sum_{i=0}^{n-1} q^i - \sum_{i=1}^{n} q^i = q^0 - q^n = 1 - q^n$. Donc $(1-q)\, v_n = u_0(1-q^n)$. Le second point est alors une conséquence de la première propriété. □

Définition : On appelle suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 la suite définie par la récurrence suivante : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r, \ n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in \mathbb{R} \text{ fixé} \end{cases}$

Propriété 7 : Soit $(u_n)_n$ une suite numérique, alors il y a équivalence entre les deux points suivants :

1. $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n\, r$

3.2 Théorèmes de comparaison et d'encadrement

Théorème 1 : Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergentes telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ (ou bien $u_n < v_n$) alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Remarque : Même si l'inégalité initiale est stricte, elle devient large à la limite. Par exemple, $u_n = 1 - 1/n < 1 + 1/n = v_n$ mais $\lim u_n = \lim v_n = 1$.

Théorème 2 : Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.

1. si $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$ alors $(v_n)_n$ aussi.
2. si $(v_n)_n$ diverge vers $-\infty$ alors $(u_n)_n$ aussi.

Exemple : $u_n = n < \frac{n^2+1}{n} = v_n$ donc $\lim v_n = +\infty$.

Théorème 3 : Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites telles que

1. à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$
2. $\lim u_n = \lim w_n$

alors les trois suites ont même limite.

Remarque : Si $w_n = -u_n$ alors la condition 1. devient $|v_n| \leq w_n$ et la 2. devient $\lim w_n = 0$.

Exemple : Posons $v_n = \frac{2n|\sin(8n)|}{n^2+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq |\sin(x)| \leq 1$, on a $0 \leq v_n \leq \frac{2n}{n^2+1}$ (Inégalité1). Or $0 \leq \frac{2n}{n^2+1} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$ (Inégalité2) pour $n > 0$. La suite de terme général $\frac{2}{n}$ converge vers 0. On peut donc appliquer le théorème grace à (Inégalité2) : la suite $(\frac{2n}{n^2+1})_n$ converge vers 0. On peut donc appliquer une seconde fois le théorème (Inégalité1) : la suite $(v_n)_n$ converge vers 0. □

3.3 Suites monotones

Propriété 8 :

1. Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
2. Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Propriété 9 :

1. Toute suite croissante majorée est convergente.
2. toute suite décroissante minorée est convergente.

Exemple : Soit $u_n = \frac{3n}{n+1}$. Puisque $u_n \leq \frac{3n+3}{n+1} = 3$, la suite est majorée par 3. Montrons que la suite est croissante. Cela revient à montrer que $u_{n+1} = \frac{3n+3}{n+2} \geq \frac{3n}{n+1} = u_n \Leftrightarrow (3n+3)(n+1) \geq 3n(n+2) \Leftrightarrow 3n^2+6n+3 \geq 3n^2+6n$. Cette dernière inégalité est vraie puisqu'elle équivaut à $3 \geq 0$. Ainsi $(u_n)_n$ est croissante et majorée donc convergente. Pour autant, cela ne nous permet pas de déterminer la limite. □

Remarque : Ces résultats sont également très utiles dans l'étude des suites récurrentes (voir les exemples du paragraphe 4.2) ou pour l'étude des suites adjacentes.

I.4 Suites récurrentes

4.1 Définitions

Définition : Etant donné f une fonction numérique d'un intervalle I dans lui-même (ou de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Le système $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n),\ n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in \mathbb{R} \text{ fixé} \end{cases}$ défini une suite appelée suite récurrente d'ordre 1 (associée à f).

Exemple : La donnée de $f(x) = qx$, où q est fixé, permet de définir par le biais de la définition une suite géométrique. Les suites géométriques sont donc des suites récurrentes d'ordre 1 particulières.

Définition : Etant donné f une fonction numérique de $I \times I$ dans lui-même (ou de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Le système $\begin{cases} u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}),\ n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } u_0 \in \mathbb{R} \text{ fixés} \end{cases}$ défini une suite appelée suite récurrente d'ordre 2.

Exemple : $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$, $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Les premiers termes de la suite se calculent de proche en proche : $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 4$, $u_5 = 5$, ...

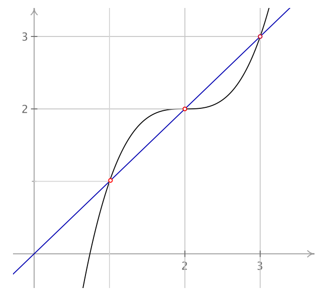
4.2 Notion de point fixe

Soit f une fonction numérique de I dans lui-même (I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ lui-même).

Définition : On appelle point fixe de f tout point $x \in I$ vérifiant $f(x) = x$.

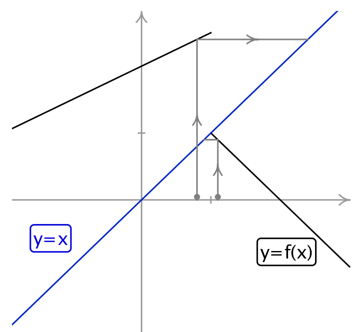
Remarque : Les points fixes sont donc les abscisses des points d'intersection de la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice) et du graphe de la fonction.

Exemple : Les points fixes de $f(x) = (x-2)^3+2$ vérifient l'équation $(x-2)^3+2 = x$. On voit que 2 est solution donc point fixe. L'équation $(x-2)^3+2 = x$ équivaut à $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. Puisque 2 est solution, on peut factoriser par $x - 2$ et on a : $(x-2)(x^2-4x+3) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x-3) = 0$. Donc f admet trois points fixes : 1,2 et 3.



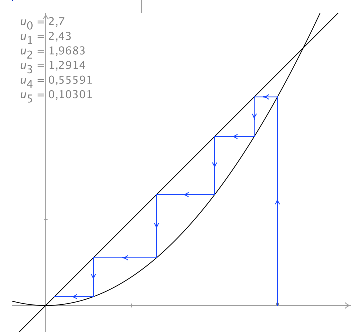
Propriété 10 : Soit (u_n) une suite récurrente d'ordre 1 (associée à f) où f est une fonction continue. Si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors ℓ est un point fixe de f.

Remarque : La démonstration n'est qu'une application de la définition de la continuité d'une fonction. La discontinuité permet un "saut" qui empêche la convergence comme l'illustre le graphe ci-contre.

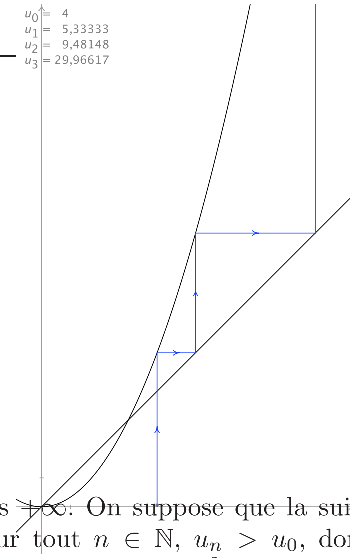


Exemples :

1) Soit la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 2,7 \\ \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{3} \end{cases}$ Il semble que la suite soit décroissante et qu'elle converge vers 0. On démontre par récurrence que $(v_n)_n$ est décroissante et donc majorée par 2,7. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$, ainsi $(v_n)_n$ est minorée par 0. Donc la suite $(v_n)_n$ est convergente et sa limite ℓ vérifie $\ell = \dfrac{\ell^2}{3}$, ce qui donne $\ell = 0$ ou $\ell = 3$. Mais comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq 2,7$, ℓ ne peut être égal à 3. Conclusion : la suite $(v_n)_n$ converge vers 0.



2) Soit la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{3} \end{cases}$

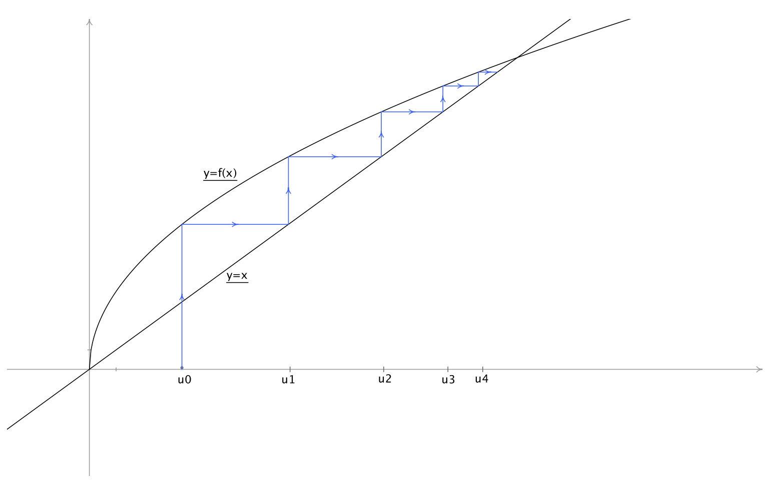


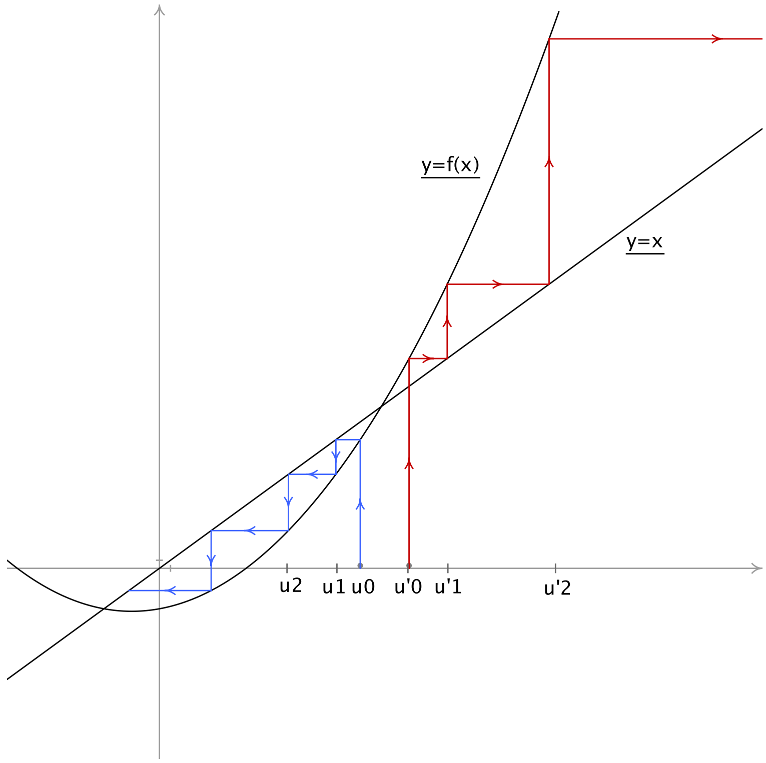
On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{3}$. A l'aide de la représentation graphique, on peut conjecturer que la suite est croissante et semble diverger vers $+\infty$.
Montrons par récurrence que la suite est strictement croissante. $u_0 = 4$ et $u_1 = \dfrac{4^2}{3} = \dfrac{16}{3}$, alors $u_0 < u_1$.
Supposons la propriété vraie au rang n, c'est à dire $u_n < u_{n+1}$, alors comme la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, on obtient $f(u_n) < f(u_{n+1})$, c'est à dire $u_{n+1} < u_{n+2}$, et la propritété est vraie au rang $n+1$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$ et la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante.

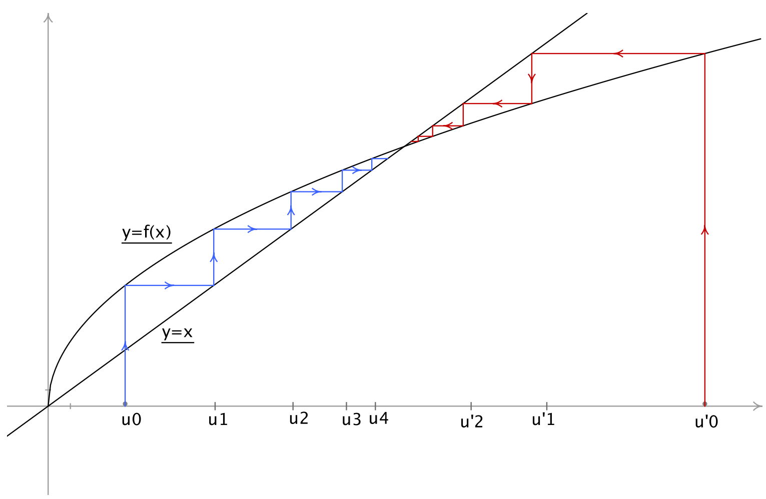
Montrons alors qu'elle n'est pas majorée pour prouver qu'elle diverge vers $+\infty$. On suppose que la suite $(u_n)_n$ est majorée, dans ce cas, elle converge vers un réel ℓ, de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_0$, donc $\ell > 4$. D'autre part, comme f est continue sur $[0;+\infty[$, on obtient $f(\ell) = \ell$, ce qui donne $\ell^2 - 3\ell = 0$, et on en déduit : $\ell = 0$ ou $\ell = 3$. Ceci est incompatible avec $\ell > 4$, donc l'hypothèse $(u_n)_n$ est majorée est fausse.

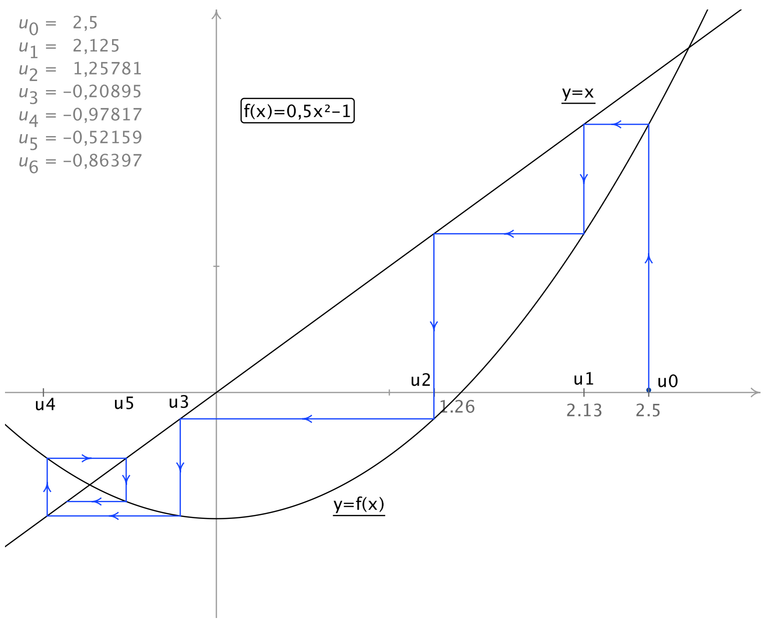
Donc la suite $(u_n)_n$ n'est pas majorée et comme elle est strictement croissante, on en déduit qu'elle diverge vers $+\infty$. $\square$

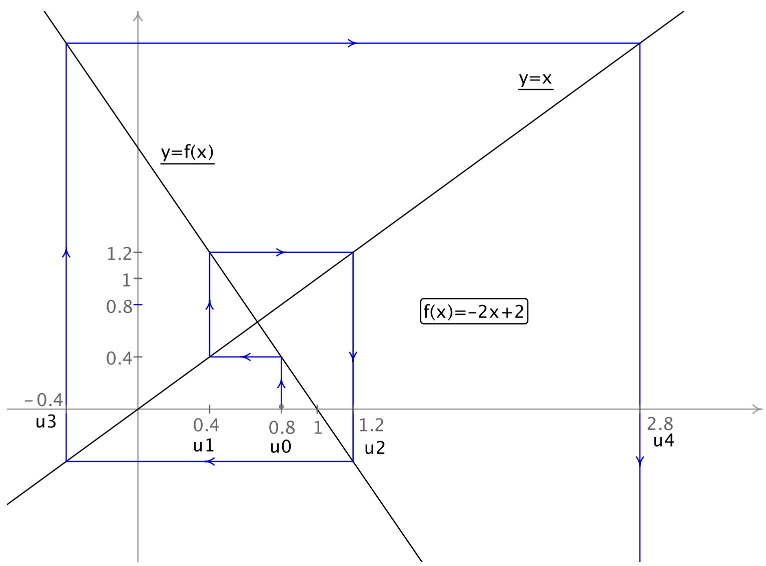
Remarque : Beaucoup de comportements autres que ceux rencontrés jusqu'ici peuvent être possibles. Voici quelques représentations graphiques illustrant les principaux comportements :




y=f(x)
y=x
u2
u1
u0
u'0
u'1
u'2


y=f(x)
y=x
u0
u1
u2
u3
u4
u'2
u'1
u'0





I.5 Equations récurrentes affines à coefficients réels constants

5.1 Ordre 1

Soit g une fonction réelle. Soit a un réel.

<u>Définition</u> :

1. On appelle équation récurrente affine à coefficients réels constants d'ordre 1, toute équation, dont l'inconnue est une suite, de la forme suivante :

$$u_{n+1} - a\,u_n = g(n) \qquad \text{(ER)}$$

2. On appelle équation homogène associée ou équation sans second membre l'équation :

$$u_{n+1} - a\,u_n = 0 \qquad \text{(EH)}$$

Propriété 11 : L'équation (EH) définit les suites géométriques de raison a. Les solutions de (EH) sont donc toutes les suites $(\tilde{u}_n)_n$ de la forme $\tilde{u}_n = \alpha\, a^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Propriété 12 :(& Définition)
Soit $(u_n^*)_n$ une suite vérifiant (ER). Alors toute suite $(\tilde{u}_n + u_n^*)_n$ vérifie aussi (ER).
De plus, toute suite vérifiant (ER) est de la forme $(\tilde{u}_n + u_n^*)_n$.
$(\tilde{u}_n)_n$ est appelée solution générale de (EH) et $(u_n^*)_n$ solution particulière de (ER).
$(\tilde{u}_n + u_n^*)_n$ est la solution générale de (ER).

Démonstration : Connaissant une solution particulière $(u_n^*)_n$ de (ER), posons $v_n = u_n - u_n^*$. L'équation (ER) devient donc : $(v_{n+1} + u_{n+1}^*) - a\,(v_n + u_n^*) = g(n)$ qui équivaut à $(v_{n+1} - a\,v_n) + (u_{n+1}^* - a\,u_n^*) = g(n) \Leftrightarrow v_{n+1} - a\,v_n = 0$. Ainsi, connaissant une solution particulière de (ER), résoudre (ER) revient à résoudre (EH). Puisque toutes les solutions de (EH) sont connus, toutes celles de (ER) aussi. $\square$

Exemple : Résoudre $u_{n+1} - 2\,u_n = -1$.
L'équation homogène associée est (EH) $u_{n+1} - 2\,u_n = 0$. Donc la solution générale de (EH) est $\tilde{u}_n = \alpha\, 2^n$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. D'autre part, on vérifie que la suite constante $u_n^* = 1$ est bien solution (particulière) de (ER). Donc les solutions de (ER) sont les suites de la forme $u_n = \tilde{u}_n + u_n^* = \alpha\, 2^n + 1$.

On voit donc bien que toute la subtilité de résolution repose sur la recherche d'une solution particulière de (ER). Il suffit ensuite d'ajouter la solution générale de (EH) qui est très facilement déterminable.
La forme de cette solution particulière est entièrement liée à celle de $g(n)$. Le résultat suivant donne des directions à privilégier et fournit une méthode paramétrique (il suffit de déterminer des paramètres et non une suite). On retiendra que l'on cherche la solution particulière sous la "même forme" qu'est $g(n)$.

Propriété 13 : Recherche des solutions particulières :

1. Si $g(n)$ est un polynome de degré d, on pose u_n^* polynome en n de degré d.
2. Si $g(n)$ est une puissance de p, on pose u_n^* puissance de p.
3. Si $g(n)$ est le produit ou la somme de polynomes et de puissances, on pose de même pour u_n^*.

Exemples :

1. Pour l'équation $u_{n+1} - 2\,u_n = -1$, on a $g(n) = -1$, donc $g(n)$ est un polynome de degré 0. On pose $u_n^* = a \in \mathbb{R}$. Reste à trouver la valeur du paramètre a. En remplacant dans l'équation, on a : $a - 2a = -1$. Donc $a = 1$ et $u_n^* = 1$ est bien solution (particulière) de (ER).
2. Pour l'équation $u_{n+1} - 2\,u_n = n$, on a $g(n) = n$, donc $g(n)$ est un polynome de degré 1. On pose $u_n^* = a\,n + b$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Reste à trouver la valeur des paramètres a et b. En remplacant dans l'équation, on a : $a(n+1) + b - 2(an+b) = n$. Donc $-an + (a-b) = n$ (pour tout n) et par identification, on a $\left\{\begin{array}{l} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{array}\right.$. Donc $a = b = -1$ et $u_n^* = -n - 1$ est bien solution (particulière) de (ER).

1. Par solution générale, on sous-entend qu'il n'y en a pas d'autres. Ces solutions dépendent d'un paramètre dont la donnée fournit une solution en particulier, appelée solution particulière

3. Pour l'équation $u_{n+1} - 2\,u_n = 3^n$, on a $g(n) = 3^n$, donc $g(n)$ est une puissance de 3. On pose $u_n^* = a\,3^n$ où $a \in \mathbb{R}$. Reste à trouver la valeur du paramètre a. En remplacant dans l'équation, on a : $a3^{n+1} - 2a3^n = 3^n$. Donc $3a - 2a = 1$ et $a = 1$ et $u_n^* = 3^n$ est bien solution (particulière) de (ER). □

Remarque : (Résonnance) : Pour l'équation $u_{n+1} - 2\,u_n = 2^n$, on a $g(n) = 2^n$, donc $g(n)$ est une puissance de 2. On pose $u_n^* = a\,2^n$ où $a \in \mathbb{R}$. Reste à trouver la valeur du paramètre a. En remplacant dans l'équation, on a : $a2^{n+1} - 2a2^n = 2^n$ qui équivaut à $0 = 2^n$. Cela signifie que l'on ne peut pas trouver de solution (particulière) de (ER) de la forme $u_n^* = a\,2^n$. On parle ici de résonnance.

Définition : Il y a résonnance lorsque un terme de $g(n)$ ou de u_n^* est solution de (EH).

Propriété 14 : Recherche des solutions particulières dans le cas d'une résonnance :
Dans le cas d'une résonnance, on recherche une solution particulière en multipliant par n le terme de résonnance de u_n^*.

Exemple : Pour l'équation $u_{n+1} - 2\,u_n = 2^n$, on a $g(n) = 2^n$ est solution de (EH) et il y a résonnance. Le terme $g(n)$ est une puissance de 2. On pose alors $u_n^* = a\,n\,2^n$ où $a \in \mathbb{R}$. Reste à trouver la valeur du paramètre a. En remplacant dans l'équation, on a : $a(n+1)2^{n+1} - 2an2^n = 2^n$ qui équivaut à $a(n+1) \times 2 - 2an = 1 \Leftrightarrow 2a = 1$. Donc $a = 0,5$ et $u_n^* = n2^{n-1}$ est bien solution (particulière) de (ER). □

Remarque : On peut également décomposer $g(n)$ comme $g_1(n) + g_2(n)$ pour simplifier la recherche de la solution particulière. Par exemple, pour $u_{n+1} - 2\,u_n = 2^n - 1$ (ER), on peut poser $g_1(n) = 2^n$ et $g_2(n) = -1$ puis rechercher des solutions particulières u_{n1}^* et u_{n2}^* pour $u_{n+1} - 2\,u_n = 2^n$ et $u_{n+1} - 2\,u_n = -1$. Ainsi, $u_n^* = u_{n1}^* + u_{n2}^*$ sera solution particulière de (ER), c'est à dire ici : $u_n^* = n2^{n-1} + 1$. Toute solution de (ER) s'écrit donc $u_n = \alpha\,2^n + n2^{n-1} + 1$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque : La donnée d'une condition initiale permet de déterminer l'unique solution telle que u_0 soit égale à cette condition. Dans l'exemple précédent, si on impose que $u_0 = 0$ alors $\alpha + 0 + 1 = 0$ donc $\alpha = -1$ et la solution de l'équation (ER) de condition initiale $u_0 = 0$ est $u_n = -2^n + n2^{n-1} + 1$.

Exemple : Résolvons $u_{n+1} - u_n = n + \frac{1}{2^{n-1}}$ (ER) sous la condition : $u_0 = 0$.

L'équation homogène associée est (EH) $u_{n+1} - u_n = 0$. Donc la solution générale de (EH) est $\tilde{u}_n = \alpha\,1^n = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour rechercher une solution particulière de, on peut poser $g_1(n) = n$ et $g_2(n) = (\frac{1}{2})^{n-1}$ puis rechercher des solutions particulières u_{n1}^* et u_{n2}^* pour $u_{n+1} - u_n = n$ (E1) et $u_{n+1} - u_n = 2(\frac{1}{2})^n$ (E2).

Puisque $g_1(n)$ est un polynome de degré 1, on pose $u_{n1}^* = an + b$. Dans ce cas, il y a résonnance puisque b est solution de (EH). Posons alors $u_{n1}^* = n(an + b)$. L'équation (E1) conduit alors à $2an + (b - a) = n$, puis par identification, on a $2a = 1$ et $b - a = 0$ d'où $a = b = 1/2$ et $u_{n1}^* = \frac{n}{2}(n+1)$ est une solution particulière de (E1).

En revanche, il n'y aura pas résonnance pour (E2). On pose $u_{n2}^* = a(\frac{1}{2})^n$. L'équation (E2) conduit alors à $a = -2$ et $u_{n2}^* = -2(\frac{1}{2})^n$ est une solution particulière de (E1).

Donc $u_n = \tilde{u}_n + u_{n1}^* + u_{n2}^* = \alpha + \frac{n}{2}(n+1) - 2(\frac{1}{2})^n$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est la solution générale de (ER).

La condition $u_0 = 0$ conduit à $\alpha - 2 = 0$ donc $\alpha = 2$ et donc la solution du problème est la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_n = 2 + \frac{n}{2}(n+1) - 2(\frac{1}{2})^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. □

5.2 Cas particulier : suites arithmético-géométriques

Définition : On appelle suite arithmético-géométrique toute suite définie par récurrence de la forme suivante :

$$u_{n+1} = a\,u_n + b$$

C'est un cas particulier de suite récurrente d'ordre 1 où $g(x) = b$.

Propriété 15 : Si ℓ est un point fixe de f où $f(x) = ax + b$ (c'est à dire : $\ell = a\,\ell + b$) alors la suite $v_n = u_n - \ell$ est une suite géométrique.

Propriété 16 : Le schéma de l'étude d'une suite arithmético-géométrique est toujours le même :

1. Introduction d'une suite auxiliaire (v_n) définie à l'aide de la suite (u_n)
2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique
3. En déduire une formule générale exprimant v_n en fonction de n
4. A partir de la relation entre (v_n) et (u_n), en déduire une formule générale exprimant u_n en fonction de n

Exemple : $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pout tout $n \geq 0$ et $u_0 = 1$.