

Travaux Dirigés n°2

On va essayer d'utiliser l'outil des suites pour faire quelques calculs financiers élémentaires.

1 Taux proportionnel, taux équivalent

1.1 Définitions

Le taux **proportionnel** au taux i pour une période divisée en k sous-périodes est

$$i_k = \frac{i}{k}.$$

Le taux **équivalent** au taux i pour une période divisée en k sous-périodes est

$$i_k = (1 + i)^{1/k} - 1.$$

1.2 Exercices

1) Si le taux annuel est de 6% calculer le taux mensuel **proportionnel** et le taux mensuel équivalent.

2) Si le taux mensuel est de 1% calculer le taux annuel **proportionnel** et le taux annuel équivalent.

2 Placements

2.1 Placements simples

On place une somme C_0 pendant n périodes au taux à intérêt composé de i par période.

Soit C_n le capital acquis au bout de n périodes et C_{n+1} le capital acquis au bout de $n + 1$ périodes. On a :

$$C_{n+1} = C_n + C_n \times i = C_n(1 + i)$$

C_n est une suite géométrique de premier terme C_0 et de raison $1 + i$.

On a donc

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

Exercices :

3) On place 1000 euros pendant 3 ans au taux annuel de 2,5%. Quelle est la valeur acquise ?

4) Pendant combien de temps faut-il placer 1000 euros au taux annuel de 2,5% pour obtenir 1100 euros ?

NB : Ce qu'il faut savoir sur les logarithmes

$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b) \quad \log(a^n) = n\log(a) \quad \log(1) = 0 \text{ et } \log(x) > 0 \text{ si } x > 1.$$

2.2 Placements échelonnés

On effectue des n versements égaux d'un montant a , un par période au taux par période de $i\%$ et on cherche la valeur acquise par cette suite de versements.

Alors : $C_n = a(1 + i)^{n-1} + a(1 + i)^{n-2} + \dots + a(1 + i) + a$

D'où $C_n = a[(1 + i)^{n-1} + (1 + i)^{n-2} + \dots + (1 + i) + 1]$

et avec la formule sur la somme des premiers termes d'une suite géométrique (ici $q = 1 + i$)

$$\text{Rappel : } 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

On obtient :

$$C_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Exercices :

5) On fait des versements de 500 euros mensuels sur un livret de caisse d'épargne rémunéré au taux annuel de 2,25%.

Combien a-t-on au bout de 3 ans ? (calcul au taux proportionnel).

3 Remboursements échelonnés

3.1 Calcul des annuités

On effectue des n remboursements égaux d'un montant a , un par période au taux par période de $i\%$ et on cherche la valeur actuelle de ces remboursements.

Alors : $D_0 = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \dots + a(1+i)^{-n}$

D'où $D_0 = a(1+i)^{-n}[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i) + 1]$

et avec la formule sur la somme des premiers termes d'une suite géométrique (ici $q = 1+i$)

Rappel : $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$

On obtient :

$$D_0 = a(1+i)^{-n} \frac{(1+i)^n - 1}{i} = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Exercices

6) On emprunte 2000 euros au taux annuel à intérêts composés de 12%. Le remboursement se fait en une fois au bout de deux ans. Quel est le montant remboursé ?

7) On emprunte 2000 euros au taux annuel 12%. Le remboursement se fait en 6 mensualités égales. Quel est le montant d'une mensualité sachant que l'on utilise le taux mensuel proportionnel ?

8) Attention : Ne pas confondre les deux problèmes suivants, le taux annuel est de 5% :

a) Donner le capital C acquis par 10 versements annuels de 1000 euros .

b) Quelle somme D_0 peut-on rembourser par 10 annuités de 1000 euros ?

c) Quel lien existe-t-il entre C et D ?

9) On reçoit le document :

Montant	5 000	7 500	10 000	12 000
Durée totale du prêt	12 mois	24 mois	48 mois	60 mois
TAEG fixe	2,30%	3,90%	5,80%	6,90%
Mensualités	421,82	325,13	233,25	235,87
Montant total dû	5061,84	7803,12	11196,00	14152,20

Comment retrouver ces valeurs ? Utiliser par exemple la première colonne.

Applique-t-on des taux équivalents ou proportionnels ?

3.2 Tableau d'amortissement

Exemple simple :

On emprunte 10000 euros au taux annuel à IC de 6% sur 5 ans. Les remboursements seront annuels.

L'annuité est de $a = 10000 \frac{i}{1 - (1+i)^{-5}} = 2374$.

Bien entendu $5 \times 2374 = 11870 > 10000$.

Dans chaque annuité il y a deux parties :

- Une partie qui sert à payer des intérêts, qui est calculée en fonction de la dette restante.
- Une partie qui sert à rembourser la dette, on l'appelle l'amortissement.

La construction d'un tableau d'amortissement se fait de façon automatique avec un tableur.

Taux	6%			
Année	5			
Valeur actuelle	10000			
Annuité	2374			
Année	Dette	Intérêt	Amortissement	Annuité
1	10000	600	1774	2374
2	8226	494	1880	2374
3	6346	381	1993	2374
4	4352	261	2113	2374
5	2240	134	2240	2374

Règle essentielle :

Annuité = Amortissement + intérêt

Remarques :

La somme des amortissements permet de retrouver D_0 .

La somme des intérêts est $na - D_0$, c'est le coût de l'emprunt sur la période considérée.

On prouve que les amortissements forment une suite géométrique de raison $1 + i$. On a donc $A_n = A_1(1 + i)^{n-1}$ avec $A_1 = a - D_0i$.

Les amortissements forment une suite croissante, en effet à chaque remboursement la dette diminue, l'intérêt sur cette dette aussi et donc les amortissements augmentent.

Taux	i			
Année	n			
Valeur actuelle	D_0			
Annuité	a			
Année	Dette	Intérêt	Amortissement	Annuité
1	D_0	$I_1 = D_0xi$	$A_1 = a - I_1$	a
2	$D_1 = D_0 - A_1$	$I_2 = D_1xi$	$A_2 = a - I_2$	a
3	$D_2 = D_1 - A_2$	$I_3 = D_2xi$	$A_3 = a - I_3$	a
...
n	X	iX	$a - iX = X$	a

Exercices

10) Une famille peut consacrer 1600 euros par mois au remboursement d'un prêt immobilier d'une durée de 240 mensualités au taux annuel 6,5%. Si l'organisme financier emploie pour le calcul des intérêts le taux mensuel proportionnel, quel montant maximum cette famille peut-elle emprunter ? Quel est le coût de prêt ?

11) Pour acheter un appartement, vous empruntez à votre banque la somme S de 100000 euro au début de l'année 0, au taux annuel de 6%.

a) Le remboursement se fait en 10 annuités constantes. Calculer le montant de l'annuité.

b) Votre banquier vous annonce que le remboursement se fera en 120 mensualités constantes m, le taux mensuel étant évidemment de 0,5%. (c'est le type de calcul que font effectivement les banques). Calculer le montant m et écrire les deux premières lignes du tableau d'amortissement.

12) La 120^e ligne d'un tableau d'amortissement d'un emprunt remboursable par mensualités constantes est

Dette due	Intérêt	Amortissement
296491,07	889,47	2036,08

- 1- Quel est le taux d'intérêt mensuel pratiqué? Quel est la taux d'intérêt annuel équivalent?
- 2- Quelle est la mensualité?
- 3- On peut montrer que la durée de l'emprunt est 20 ans. Quelle est la somme empruntée?

13) Un emprunt est remboursable en 10 ans par annuités constantes. Sachant que le troisième amortissement est de 2103,7 euro et le sixième de 2453,30 euro, calculer :

- a) le taux de l'emprunt
- b) le capital emprunté
- c) l'annuité constante
- d) le capital restant du à la fin de la huitième année.

14) Le crédit renouvelable (ou crédit *revolving*) est un produit bancaire de plus en plus proposé aux particuliers. Il s'agit de prêts que l'emprunteur peut utiliser librement sans affectation précise ou de prêts associés à des cartes et consentis pour des achats chez des commerçants affiliés (par exemple cartes Cofinoga, Pass de Carrefour, FNAC mais aussi abonnements dans les salles de gymnastique). Dans ce type de prêt, le montant prêté est plafonné : l'organisme de prêt détermine le montant maximal (appelé encore plafond) du prêt en fonction de la capacité de remboursement du client et de la durée souhaitée. Tant que le plafond n'est pas atteint l'emprunteur peut solliciter un nouveau prêt dont le plafond sera calculé en tenant compte des versements en cours dans les prêts déjà consentis. Quand le plafond est atteint l'emprunteur ne peut plus solliciter de prêt sans quoi il dépasse sa capacité de remboursement ; dans ce cas il doit attendre que les remboursements des prêts en cours permettent de revenir sous le plafond. Un particulier peut consacrer 250 euro par mois à des remboursements de prêts. Il sollicite un crédit renouvelable de 12 mois au taux annuel de 10,2%.

- Sachant que l'organisme de crédit utilise un taux mensuel proportionnel pour le calcul des intérêts, calculer le plafond de ce crédit.
- Cette personne emprunte 1500 euro pour 12 mois. Quelle est le montant d'une mensualité de remboursement?
- Après la septième mensualité, quelle somme peut-il emprunter sur deux ans?