AES - Misashs
Fonctions puissances, logarithmes et exponentielles

1 Fonctions puissances

On a déjà étudié les fonctions du type $f(x) = x^n$ où n est un entier naturel dans le paragraphe sur les polynômes et $f(x) = x^n$ où n est un entier relatif dans le paragraphe sur les fractions rationnelles.

Exercices
Dessiner rapidement et sur le même graphique les fonctions x^p pour p prenant les valeurs $-2, -1, 1, 2, 3$.

Puissances d'exposant fractionnaire
On sait que $f(x) = x^n$ où n est un entier naturel strictement positf est continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$, c'est donc une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ et on a :
$y = x^n$ équivaut à $x = y^{\frac{1}{n}}$. On a alors $x^{\frac{p}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^p$.

Résultat important
Soit $f(x) = x^r$ où fonction puissance où r est un exposant fractionnaire quelconque.
Alors f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $f'(x) = rx^{r-1}$.
On généralise cette formule :
Soit $f(x) = u(x)^r$ où u est une fonction dérivable et positive sur son ensemble de définition.
Alors f est dérivable et $f'(x) = ru'(x)u(x)^{r-1}$.

Exercices
1- Dessiner rapidement et sur le même graphique les fonctions x^p pour p prenant les valeurs $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.
2- Résoudre les équations suivantes :
$(1 + t)^{12} = 1,1 \qquad (1 + t)^{12} = 0,85$
Certains reconnaitront des équations que nous avons rencontrées en mathématiques financières.
3- Les règles de simplification de calcul sont les mêmes pour les puissances fractionnaires que pour les puissances entières.
En particulier, on a : Soit $p \geq 1$ et $q \geq 1$ des entiers naturels et a, b des réels positifs ou nuls on a :

	Propriétés	Exemples
(0)	$0^{\frac{1}{q}} = 0$	
(1)	$1^{\frac{1}{q}} = 1$	
(2)	$(a^{\frac{1}{q}})^q = a$	$(\sqrt{3})^2 = 3; (5^{\frac{1}{4}})^4 = 5$
(3)	$a^{\frac{1}{p}} a^{\frac{1}{q}} = a^{(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}$	$2^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{1}{4}} = 2^{(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})} = 2^{\frac{7}{12}}$
(4)	$a^{\frac{1}{q}} b^{\frac{1}{q}} = (ab)^{\frac{1}{p}}$	$2^{\frac{1}{4}} 3^{\frac{1}{4}} = 6^{\frac{1}{4}}$; $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
(5)	$(a^{\frac{1}{p}})^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{pq}}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$
(6)	$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{q}}}$	$\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$

Simplifier : $6^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{1}{3}}$ $\quad 5^{\frac{1}{3}} \times 25^{\frac{1}{3}}$ $\quad \dfrac{3^{\frac{1}{4}}3^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\sqrt{2}}}$ $\quad \sqrt{(4a^{\frac{1}{2}})(2a^{\frac{1}{2}})}$

4- Une entreprise a la fonction de production suivante : $F(L) = L^{\frac{1}{4}}(6-L)^{\frac{1}{4}}$ L la quantité de travail utilisée.

Dans quel intervalle faut-il choisir L pour que cette fonction de production ait un sens ? Quelle est la quantité de travail qui permet de maximiser la production de l'entreprise ?

5-Une entreprise a la fonction de production $F(K) = K^{\frac{1}{2}}(12-K)^{\frac{1}{3}}$ avec K le capital.

Dans quel intervalle faut-il choisir K pour que cette fonction de production ait un sens ? Quelle est le capital qui permet de maximiser la production de l'entreprise ?

2 Fonctions logarithmes

2.1 Fonction logarithme népérien

(Neper : Astronome écossais, 1550-1617)

Définition 1 *La fonction logarithme népérien définie sur* $]0, +\infty[$ *est la fonction qui admet la fonction* $\dfrac{1}{x}$ *comme fonction dérivée et qui s'annule en* 1. *On la note ln.*

On a donc : $ln(x)' = \dfrac{1}{x}$ *et* $ln(1) = 0$.

Remarque 1 *1-On admet l'existence et l'unicité de cette fonction.*

2-Comme la dérivée de cette fonction est strictement positive sur $]0, +\infty[$ *la fonction ln est strictement croissante de* $]0, +\infty[$ *vers* $]-\infty, +\infty[$. *Il existe donc une seule valeur de x dont le logarithme vaut* 1. *On la note e. On a* $ln(e) = 1$. *e est un irrationnel. Une valeur approchée de e est* $2,72$. *C'est la base des logarithmes népériens.*

3- On admet le résultat suivant (qui se démontre facilement si on connait la fromule de dérivation des fonctions composées) qui est une généralisation de $ln(x)' = \dfrac{1}{x}$.

$ln(u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ *où u est une fonction strictement positive et dérivable sur* $\mathbb{R}$

medskip

Exercices

1- Faire le tableau de variation de cette fonction en y mettant toutes les informations que vous avez. On admet que cette fonction a pour limite $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$. Faire la représentation graphique de la fonction ln en cherchant des valeurs avec la calculatrice.

2- Préciser l'ensemble de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = ln(x^2)$ $\quad g(x) = ln(3x+1)$ $\quad h(x) = ln(\frac{x^2}{x-1})$

3- Etudier la fonction suivante (ensemble de définition, limites et dérivée, tableau de variation) :

$$f(x) = ln(x^2 + 1)$$

Proposition 1 *Pour tout réel positif a et b on a :* $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$.

Cette propriété est admise.

Conséquences :

Pour tous réels positifs a et b on a : $ln(\frac{a}{b}) = ln(a) - ln(b)$.

Pour tout réel positif a et tout entier n on a : $ln(a^n) = nln(a)$.

Exercices

1-Que vaut $ln(\frac{1}{b})$? $ln(\frac{1}{e})$? $ln(\frac{1}{b^2})$

Que vaut $ln(b^5)$? Que vaut $ln(e^5)$? Que vaut $ln(\sqrt{b})$?

2- Résoudre les équations suivantes (On peut en rencontrer certaines en Mathématiques financières)

$1,01^n = 2 \qquad 51,04^{-n} = 3 \qquad 51,04^n = 31,04^{15}$.

2.2 Fonction logarithme décimal

On notera cette fonction log. la base est alors 10. On a donc $log(10) = 1$. La fonction log est proportionnelle à ln. On a : $log(x) = \frac{ln(x)}{ln(10)}$. Les propriétés de la fonction précédente sont conservées.

Exercices

1- Que vallent $log(100)$, $log(1000)$, $log(0,1)$ $log(0,001)$?

Que peut-on dire $log(10^n)$ et de $log(10^{-n})$?

2- Le caractère basique ou acide d'une solution est donné par son PH.

Par définition le PH est : $PH = -log(a)$ où a est la concentration (exprimée en moles par litre) en ions hydrogène :

Pour une solution neutre $a = 10^{-7}$ le PH est donc de ....

Quel est le PH d'une solution où il y a plus d'ions hydrogènes (solutions dites acides) ?

3 Fonctions exponentielles

3.1 Fonction exponentielle de base e

On définit la fonction exponentielle avec l'équivalence :

$exp(x) = y$ équivaut à $ln(y) = x$.

La fonction exponentielle est donc définie sur $\mathbb{R}$ mais a valeur dans $]0, +\infty[$. On a aussi $exp(0) = 1$.

De plus $exp(x)^{'} = exp(x)$, la fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus $exp(1) = e$.

Justifier les égalités suivantes :

$exp(x + y) = exp(x)exp(y) \qquad exp(-x) = \frac{1}{exp(x)} \qquad exp(x - y) = \frac{exp(x)}{exp(y)}$

Les remarques précédentes permettent de justifier la notation $exp(x) = e^x$.

Remarque :

A l'aide de la fonction exponentielle on peut définir n'importe quelle puissance d'un nombre positif d'exposant réel. On pose

$$x^y = e^{y\,ln(x)}$$

.

La seule condition à imposer est $x > 0$. Bien entendu si y est un entier ou fractionnaire on retrouve les définitions précédentes.

Exercices

1- Faire le tableau de variation de cette fonction en y mettant toutes les informations que vous pouvez obtenir. Faire la représentation graphique de la fonction *exp* en cherchant des valeurs avec la calculatrice.

2- On a $e^{u(x)} = u'(x)e^{u(x)}$.

En utilisant cette formule préciser l'ensemble de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = e^{x^2} \qquad g(x) = \dfrac{e^x + x^{-x}}{2} \qquad h(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}.$

3.2 Fonction exponentielle de base a

Soit un nombre réel strictement positif. On définit la fonction exponentiellle de base a comme la fonction réciproque de la fonction logarithme de base a ou encore par la relation $exp_a(x) = a^x = e^{x\,ln(a)}$.

Exercices

1- Soit $a = 2$. Etudier la fonction exp_2 et faire sa représentation graphique.

2- Soit $a = \frac{1}{2}$. Etudier la fonction $exp_{\frac{1}{2}}$ et faire sa représentation graphique.

4 Exercice d'application

On estime que les prestations versées aux assurés sociaux d'un pays suivent la loi :

$$f(x) = 5,2 \times 1,05^x$$

où x est le temps en années avec $x = 0$ en 1985, la dépense étant mesurée en milliards d'unités monétaires.

Les cotisations des assurés sociaux sont estimés à partir de 1985 par la loi

$$g(x) = 2,7 \times 1,12^x$$

avec les mêmes unités que la loi f.

a) Calculer recettes et dépenses en 1985. Le budget social est-il en équilibre ? Qu'en est -il en 1988 ?

b) A quel taux croisent les dépenses et les recettes de la sécurité sociale de ce pays depuis 1988 ?

c) Etudier la fonction f. La représenter sur l'intervalle $[0, 20]$. L'évolution de g est-elle différente ? Si oui en quoi ?

d) A quelle date le budget social sera-t-il en équilibre ? Que se passe-t-il ensuite ?

e) Sur quelles hypothèses reposent ces prévisions ?