Exemples de raisonnement par récurrence

Exemple 1(1892)

Le problème des tours de Hanoï est un jeu de réflexion imaginé par le mathématicien français Édouard Lucas, et consistant à déplacer des disques de diamètres différents d'une tour de « départ » à une tour d'« arrivée » en passant par une tour « intermédiaire » et ceci en un minimum de coups, tout en respectant les règles suivantes :

- on ne peut pas déplacer plus d'un disque à la fois,

- on ne peut placer un disque que sur un autre disque plus grand que lui ou sur un emplacement vide.

On suppose que cette dernière règle est également respectée dans la configuration de départ.

On cherche le nombre minimum de déplacements à effectuer.

On peut obtenir quelques valeurs à la main : pour 2 disques il faut 3 déplacements, pour trois disques il faut 7 déplacements, les manipulations deviennent difficiles pour un nombre supérieurs de disques.

Il est facile de démontrer par récurrence que si n est le nombre de disques, il faut $2^n - 1$ coups au minimum pour parvenir à ses fins, quantité qui augmente très rapidement avec n. En effet, soient a, b et c les trois emplacements des tours. Notons x_n le nombre de déplacements de disques nécessaires au déplacement d'une tour complète. Pour déplacer une tour de n disques de a vers c, on déplace la tour des n-1 premiers disques de a vers b, puis le disque n de a vers c, puis la tour des n-1 disques de b vers c. Le nombre de déplacements de disques vérifie donc la relation de récurrence : $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_n = 2x_{n-1} + 1, & \text{si } n > 1 \end{cases}$

ce qui donne bien $x_n = 2^n - 1$.

En effet, cette formule est vraie pour $n = 1$ et on suppose que $x_{n-1} = 2^{n-1} - 1$, alors $x_n = 2x_{n-1} + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2 \times 2^{n-1} - 2 + 1 = 2^n - 1$. La formule est vraie au rang n.

On peut alors calculer le nombre de déplacements nécessaires pour un plus grand nombre de disques, par exemple pour 10 disques il faut $2^{10} - 1 = 1023$ déplacements.

Le problème des tours de Hanoï est vu en algorithmique (programmation), où il offre un exemple de la puissance et de la lisibilité des programmes définis de façon récursive. En effet, la méthode de résolution vue précédemment conduit à un algorithme récursif.

Un lien pour des simulations :

www.univ-rouen.fr/LMRS/Vulgarisation/Hanoi/hanoi.html

Exemple 2

Les entiers impairs sont les entiers de la forme $2n + 1$ (le premier obtenu pour n=0, est 1).

Calculons les premières sommes. Quelle conjecture pouvons-nous faire ?

On va donc montrer par récurrence que la somme des n premiers entiers impairs est égale au carré de n :

$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Remarquons que cette somme peut s'écrire avec le symbole Σ. En effet $1+3+\ldots+(2n-1) = \Sigma_{i=1}^{n}(2i - 1)$.

Bien que l'écriture précédente puisse laisser entendre que $2n - 1 > 3$, on ne le supposera pas. La somme est réduite à 1 si n=1, égale à 1+3 si n=2 etc.

* initialisation : le cas n=1 est celui où la somme est 1, elle est donc bien égale à 1^2.

* hérédité : pour un entier n arbitraire, on suppose que $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$. Puisque l'entier impair qui suit $2n-1$ est $2n+1$, on en déduit que :

$1+3+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$,

c'est-à-dire que la propriété au rang suivant.

La propriété est vraie pour tout n.

On peut en déduire alors que $1+3+\ldots+99=\Sigma_{i=1}^{50}(2i-1)=50^2=2500$.

Exemple 3

C'est en fait un exercice qui montre que le raisonnement par récurrence doit être manipulé avec précaution. En effet :

Trouver l'erreur dans le raisonnement par récurrence suivant.

Soit $P(n)$ la propriété " dans n'importe quel groupe de n personnes, tous les gens ont le même âge".

$P(1)$ est vraie de façon évidente.

Soit n tel que $P(n)$ est vraie. Soit G un groupe de $n+1$ personnes que l'on numérote de 1 à $n+1$. Soit G_1 (resp G_2) le groupe formé des n premières (resp dernières) personnes de G. Puisque $P(n)$ est vraie, toutes les personnes de G_1 (resp G_2) ont le même âge. Or la personne numéro n est à la fois dans G_1 et dans G_2. Donc tous les gens de G ont le même âge que la personne numéro n ce qui démontre $P(n+1)$.

On en déduit que pour tout n $P(n)$ est vraie.

Exemple 4

n est un entier naturel. On note $S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+....+\frac{1}{4n^2-1}$. On peut écrire cela avec le symbole Σ.

$$S_n=\Sigma_{i=1}^{n}\frac{1}{4i^2-1}$$

.

a) Calculer S_1, S_2, S_3, S_4.

On trouve $S_1=\dfrac{1}{3}$, $S_2=\dfrac{2}{5}$, $S_3=\dfrac{3}{7}, S_4=\dfrac{4}{9}$.

b) Conjecturer une formule exprimant S_n en fonction de n.

Il semble que $S_n=\dfrac{n}{2n+1}$.

c) Démontrer cette formule par récurrence.

La formule est vraie au rang 1.

Supposons la formule vraie au rang $n-1$ et prouvons la au rang n. (Rq : le passage de n à $n+1$ est un peu plus difficile au niveau des factorisations)

On a $S_{n-1}=\dfrac{n-1}{2n-1}$. Alors $S_n=S_{n-1}+\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{n-1}{2n-1}+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Donc $S_n=\dfrac{(n-1)(2n+1)+1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{2n^2-n}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$.

Ceci est la formule cherchée. On peut alors calculer $S_10=\Sigma_{i=1}^{10}\frac{1}{4i^2-1}=\dfrac{10}{21}$.