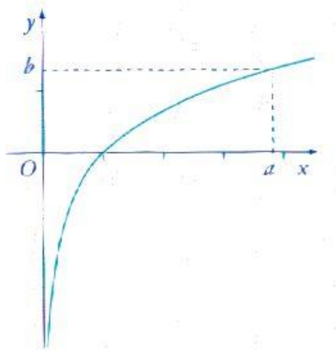
Fonction exponentielle

I. Définition de la fonction exponentielle

1) Définition



Le fonction exponentielle, notée exp, est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.
Pour tout réel x et tout réel y strictement positif :
ln y = x équivaut à y = exp(x) .

Exemples :

ln 1 = 0	ln e = 1	ln e^3 = 3	ln e^n = n
ñ 1 = exp(0)	ñ e = exp(1)	ñ e^3 = exp(3)	ñ e^n = exp(n)

Pour tout réel x, on pose : exp(x) = e^x.
Selon les cas, pour une bonne lisibilité, on utilise soit la notation exp(x) , soit e^x.

2)Propriétés

- Pour tout réel x et tout réel y strictement positif : ln y = x équivaut à y = exp(x) .
- Pour tout réel x , $e^x > 0$, c'est-à-dire l'exponentielle est toujours positive.
- Pour tout réel x , ln (exp(x)) = x (ou ln (e^x) = x)

  Car car x = ln y ñ y = exp(x)
  ñ ln y = ln (exp x) (composition par la fonction ln)
  ñ x = ln (exp x)
- Pour tout réel x strictement positif, exp (ln x) = x

  Car ln ($e^{\ln x}$) = ln x (Propriété précédente, en l'appliquant à ln x) ñ $e^{\ln x}$ = x
- $e^0 = 1$
- Pour tous réels a et b, $e^a = e^b$ équivaut à a = b.

3)Propriétés

Les propriétés suivantes se déduisent de celles du logarithme népérien.

Pour tous réels a et b, et tout naturel n :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$

  car ln (e^{a+b}) = a+b
  ln ($e^a \times e^b$) = ln e^a + ln e^b = a + b
  On a donc ln (e^{a+b}) = ln ($e^a \times e^b$) et donc $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$
- $(e^a)^n = e^{na}$

Exemples :
$e^{3,5} \times e^{1,5} = e^{3,5+1,5} = e^5$
$e^{3 + \ln 2} = e^3 . e^{\ln 2} = 2 e^3$

II. *Propriétés de la fonction exponentielle*

La fonction exponentielle, notée exp, est définie sur Ë et prend ses valeurs dans]0 ; +õ[.

1) Dérivée

La fonction exponentielle est dérivable sur Ë.
Elle est sa propre dérivée, ce qui signifie que, quel que soit x : exp'(x) = exp (x)
Si $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$.

Dem :
ln (exp (x)) = x, les dérivées de ces deux fonctions sont donc toutes les deux égales à 1.

$$[\ln (\exp (x))]' = \frac{(\exp(x))'}{\exp(x)}$$

$$\frac{(\exp(x))'}{\exp(x)} = 1$$

d'où exp'(x) = exp(x).

Exemple :
$f(x) = x^2 e^x$ alors $f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x$.

2)Limites en +õ et en -õ

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +$õ

<u>Dem :</u> comparaison de e^x et x.
$h(x) = e^x - x$
$h'(x) = e^x - 1$
h est croissante sur]0 ; +õ[
h(0) = 1, donc h(x) >0
$e^x - x > 0$
$e^x > x$
puis comparaison des limites

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +$õ

<u>Dem :</u>

$$\frac{e^x}{x} = \frac{e^x}{\ln(e^x)}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0^+$; d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x)}{e^x} = 0^+$

Par l'inverse, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\ln(e^x)} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

<u>Dem :</u>

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

<u>Dem :</u>

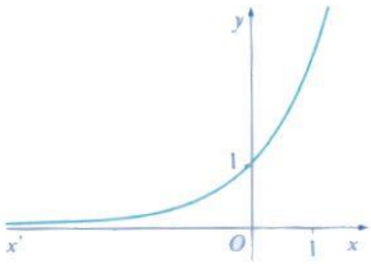
$$xe^x = -\frac{-x}{e^{-x}}$$

3)Variation de la fonction exponentielle

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
(exp x)'		+		
e^x	0 ↗	1 ↗	e ↗	+õ

4)Représentation graphique

La courbe représentative de la fonction admet pour asymptote l'axe (xx') en -õ.



III. Exponentielle d'une fonction

1) Dérivée de e^u

Soit u une fonction dérivable sur Ë.

$(e^u)' = u' e^u$.

Exemple :

$f(x) = e^{2x}$

$g(x) = e^{x^2}$

2)Limites de e^u

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +$ õ, alors $\lim\limits_{x \to a} e^{u(x)} = +$ õ.

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = -$ õ, alors $\lim\limits_{x \to a} e^{u(x)} = 0$.

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, car $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = -$ õ

3)Primitives

Les primitives de la fonction exponentielle sont les fonctions F telles que $F(x) = e^x + k$.

Une primitive de la fonction qui s'écrit $u' e^u$ est la fonction e^u.

Exemple :

$f(x) = 3\, e^{3x-5}$

IV. Exponentielle de base a

1) Définition

Soit a un réel strictement positif.

La fonction exponentielle de base a est la fonction f définie sur Ë, par $f(x) = a^x = e^{e \ln a}$

Pour tout réel x, $a^x > 0$.

En particulier :
Si a = 2 : $2^x = e^{x \ln 2}$.
Si a = 10 : $10^x = e^{x \ln 10}$
Si a = e : on retrouve la fonction exponentielle déjà étudiée.

2)Dérivée et variation

D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, puisque $f(x) = e^{x \ln a}$, f' est telle que $f'(x) = (\ln a)\, e^{x \ln a} = (\ln a)\, a^x$.

Exemple :
Si $f(x) = 4^x$, $f(x) = e^{x \ln 4}$, donc $f'(x) = (\ln 4)\, 4^x$.

Si a > 1 : la fonction a^x est strictement croissante sur Ë.
Si 0 < a < 1 : la fonction a^x est strictement décroissante sur Ë.
Si a = 1 : la fonction 1^x est strictement constante sur Ë.

3)Limites

Pour l'étude de limites, on utilise la forme $a^x = e^{x \ln a}$, ainsi que les règles sur les limites d'une fonction composée.

Exemple :
$\lim\limits_{x \to +\infty} 1{,}5^x = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln 1{,}5} = +\tilde{o}$
$\lim\limits_{x \to +\infty} 0{,}89^x = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln 0{,}89} = 0$ car $\ln 0{,}89 < 0$

V. *Croissances comparées*

Pour n entier naturel non nul :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n \times e^x = 0$$

On dit que, à l'infini, la fonction exponentielle l'emporte sur toute fonction puissance de x, qui l'emporte elle-même sur la fonction logarithme népérien.