Mathématiques en Première ES

David ROBERT

2010–2011

Sommaire

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions

Sommaire

1.1 Rappels de Seconde sur la notion de fonction

Les définitions et propriétés suivantes ont été vues en Seconde aussi les propriétés ne seront pas démontrées.

1.1.1 Définition, vocabulaire et notations

Définition 1.1. Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
Définir une fonction f sur un ensemble D, c'est associer, à chaque réel $x \in D$, *au plus* un réel noté $f(x)$.
On dit que $f(x)$ est .... de x par f et que x est .... de $f(x)$.
On note :

$$f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

et on lit « f, la fonction de D dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x)$ ».

Remarque. f désigne la fonction, $f(x)$ désigne le réel qui est l'image de x par f.

1.1.2 Ensemble de définition

Définition 1.2. L'ensemble des réels possédant une image par une fonction est appelé *ensemble de définition* de la fonction. On le note en général D_f.

1.1.3 Courbe représentative

Définition 1.3. Soit f une fonction. On appelle courbe représentative de f, notée en général $\mathscr{C}_f$, l'ensemble des points M de coordonnées ....
On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation ....

On veillera à ne pas confondre la fonction et sa représentation graphique.

1.1.4 Variations d'une fonction

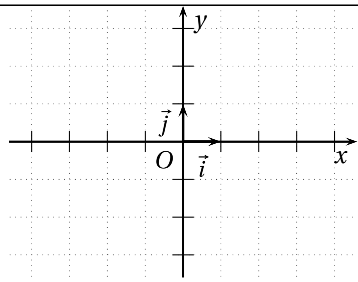
Définition 1.4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que
- f est *croissante sur I* si pour tous réels a et b de I on a : .... ;
- f est *décroissante sur I* si pour tous réels a et b de I on a : .... ;
- f est *monotone sur I* si ....

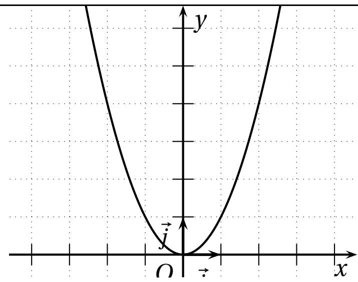
1.1.5 Fonctions de référence

Compléter le tableau 1.1.5, de la présente page, sur le modèle de la deuxième ligne.

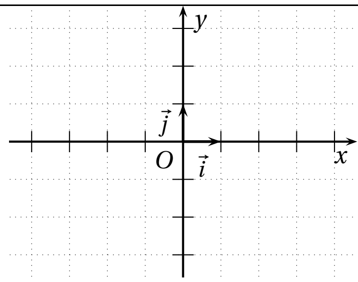
TABLE 1.1 – Fonctions de référence - Tableau de l'activité **??**

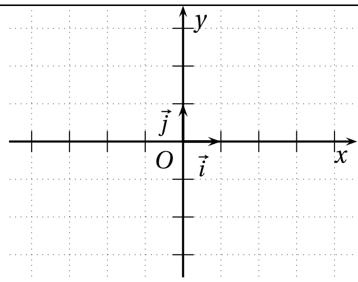
<table>
<tr><th>Fonction
Définie sur</th><th>Variations</th><th>Allure de la courbe représentative</th></tr>
<tr><td>Affine
$f(x) =$

$D_f =$</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>Carré
$f(x) = x^2$

$D_f = \mathbb{R}$</td><td>$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 0 & +\infty \\ \hline f(x)=x^2 & \searrow & & \nearrow \\ & & 0 & \end{array}$</td><td>

Parabole</td></tr>
<tr><td>Cube
$f(x) =$

$D_f =$</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>Inverse
$f(x) =$

$D_f =$</td><td></td><td>
</td></tr>
</table>

1.1.6 Quelques fonctions étudiées en Seconde

Fonctions polynômes de degré 2 (fonction trinôme)

Définition 1.5. On appelle *fonction polynôme de degré 2*, ou *fonction trinôme*, toute fonction f pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.
La courbe représentative d'une telle fonction est ....

Propriété 1.1. *Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction trinôme. Alors f a les variations résumées dans les tableaux ci-dessous :*

- *Si $a > 0$:*

x	$-\infty$	$+\infty$
f		

- *Si $a < 0$:*

x	$-\infty$	$+\infty$
f		

Une telle fonction admet donc un extremum atteint en ....

Propriété 1.2. *Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction trinôme et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Alors $\mathscr{C}_f$ admet .... : ....*

Fonctions homographiques

Définition 1.6. On appelle *fonction homographique* toute fonction f pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ où $(c; d) \neq (0; 0)$.
La courbe représentative d'une telle fonction est ....

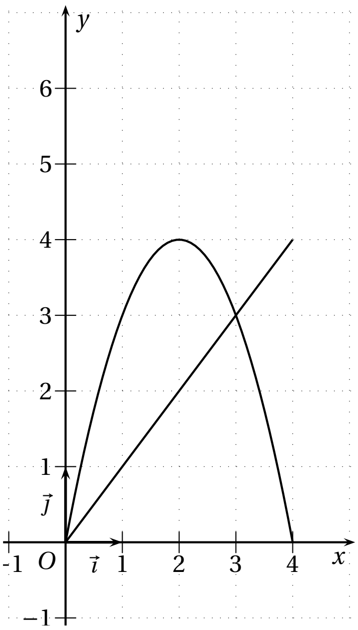
Propriété 1.3. *Soit f une fonction homographique telle que $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Alors f est définie sur ....*

1.2 Activités

ACTIVITÉ 1.1 (La fonction racine)**.**
On appelle *fonction racine* la fonction qui à un réel x associe, s'il existe, le réel positif noté $\sqrt{x}$ tel que $(\sqrt{x})^2 = x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction racine.
2. À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur, représenter la courbe de la fonction racine.
3. Que peut-on conjecturer quant aux variations de la fonction racine ?

ACTIVITÉ 1.2 (Sommes de fonctions)**.**
Sur la figure ci-contre, on a représenté une fonction affine f et une fonction trinôme g. On appelle h la fonction telle que, pour tout x, $h(x) = f(x) + g(x)$.



1. Sur ce même graphique, tracer la courbe représentant la fonction h.
   Indication : On pourra procèder point par point ou bien s'aider d'un tableau de valeurs du type :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$									
$g(x)$									
$h(x)$									

2. Donner, par lecture graphique, les variations de la fonction h.
3. Y a-t-il un lien entre les variations des deux fonctions f et g et celles de h ?

ACTIVITÉ 1.3 (Sommes de fonctions – Bis)**.**
À l'aide de vos connaissances sur les variations des fonctions affines, complèter les tableaux suivants :

1.

Fonctions	$f(x) = 2x+3$	$g(x) = x-4$	$h(x) = f(x)+g(x)$
Variations			

2.

Fonctions	$f(x) = -2x+4$	$g(x) = x+1$	$h(x) = f(x)+g(x)$
Variations			

3.

Fonctions	$f(x) = -2x+1$	$g(x) = 2x-4$	$h(x) = f(x)+g(x)$
Variations			

4.

Fonctions	$f(x) = -3x+2$	$g(x) = x-4$	$h(x) = f(x)+g(x)$
Variations			

5.

Fonctions	$f(x) = -x+4$	$g(x) = -2x+3$	$h(x) = f(x)+g(x)$
Variations			

Conjecturer le lien qu'il existe entre les variations de f et g et celles de h puis le prouver.

ACTIVITÉ 1.4 (Fonctions associées)**.**
Soit f, g, h, k, l les fonctions définies par :

- $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$
- $g(x) = 3+\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$
- $h(x) = \sqrt{x+4}$ pour $x \in [-4; +\infty[$
- $k(x) = -\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$
- $l(x) = 4\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$

1. À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur, tracer la courbe représentative de f puis celle de g.
2. Décrire la transformation permettant de passer de la courbe de f à celle de g en précisant ses caractéristiques si cette transformation est une transformation usuelle (symétrie, etc.).
3. Mêmes questions en remplaçant g par chacune des autres fonctions.

1.3 Bilan et compléments

1.3.1 Opérations algébriques sur les fonctions

De la même manière qu'on peut ajouter, multiplier, diviser, etc. des nombres, on peut ajouter, multiplier, diviser, etc. des fonctions.

Définition 1.7. Soit f et g deux fonctions définies au moins sur D et k un réel. Le tableau suivant regroupe les opérations sur les fonctions f et g :

Opération	Notation	Définition	Définie pour
Somme de la fonction f et du réel k	$f+k$	$(f+k)(x) = f(x)+k$	$x \in D_f$
Produit de la fonction f et du réel k	kf	$(kf)(x) = kf(x)$	
Somme des fonctions f et g	$f+g$	$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$	$x \in D_f \cap D_g$
Différence des fonctions f et g	$f-g$	$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$	
Produit des fonctions f et g	fg	$(fg)(x) = f(x)\times g(x)$	
Quotient des fonctions f et g	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$x \in D_f \cap D_g$ et $g(x) \neq 0$

1.3.2 Fonctions associées

Définition 1.8. Soit f une fonction définie sur D et k un réel.
On appelle fonctions associées à f les fonctions : $x \mapsto f(x)+k \quad x \mapsto f(x+k) \quad x \mapsto kf(x)$

Remarque. Ces fonctions ne sont en général pas définies sur le même ensemble de définition que f.

Propriété 1.4. *Soit f une fonction définie sur D et k un réel et $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.*
- *La courbe de $f+k$ s'obtient à partir de celle de f par une translation de vecteur $k\vec{\jmath}$*
- *La courbe de $x \mapsto f(x+k)$ s'obtient à partir de celle de f par une translation de vecteur $-k\vec{\imath}$*
- *Si $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est orthogonal, la courbe de $-f$ s'obtient à partir de celle de f par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses*

On l'admettra.

1.3.3 Variations de $f+g$

Propriété 1.5. *Soit deux fonctions f et g définies au moins sur un ensemble D.*
- *Si f et g sont deux fonctions croissantes sur D, alors la fonction $f+g$ est croissante sur D.*
- *Si f et g sont deux fonctions décroissantes sur D, alors la fonction $f+g$ est décroissante sur D.*

Preuve. Voir l'exercice 1.4 ◊

1.3.4 Variations de $f + k$

Propriété 1.6. *Soit f une fonction définie et monotone sur un intervalle I et k un réel. Les fonctions f et $f + k$ ont même sens de variation sur I.*

Preuve. Si f est croissante et $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$. Donc $f(a) + k \leq f(b) + k$ donc $f + k$ est aussi croissante.
On démontre de la même manière si f est décroissante. ♢

Exemple 1.1. La fonction $f : x \longmapsto x^2 + 2$ a les mêmes variations que la fonction carrée.

1.3.5 Variations de kf

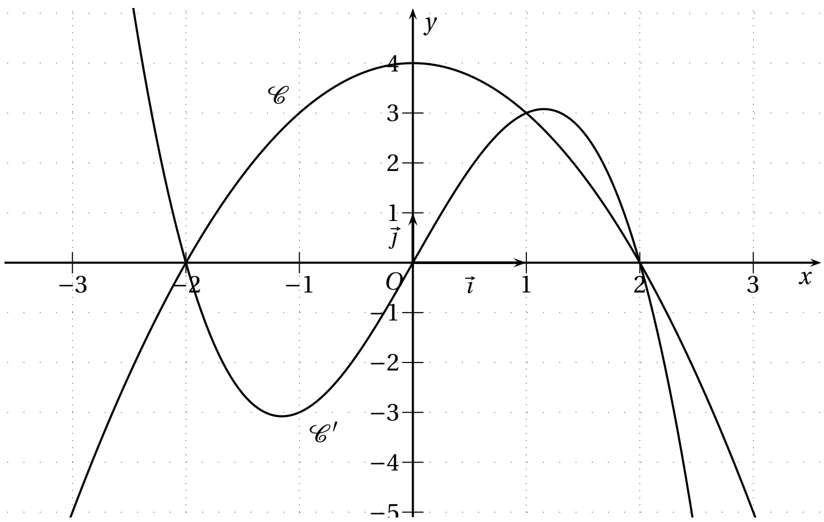
Propriété 1.7. *Soit f une fonction définie et monotone sur D.*
- *Si $k > 0$ alors les fonctions f et kf ont le même sens de variation sur D.*
- *Si $k < 0$ alors les fonctions f et kf ont des sens de variation opposés sur D.*

Preuve. Voir l'exercice 1.5 ♢

1.4 Exercices

EXERCICE 1.1.
Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 + 4x$ et $g(x) = -x^2 + 4$.
On a tracé sur le graphique 1.1 de la présente page les courbes représentatives de f et de g.

FIGURE 1.1 – Graphique de l'exercice 1.1



1. Associer chaque courbe à la fonction qu'elle représente. Justifier succinctement.
2. Déterminer graphiquement puis par le calcul les solutions des équations :
   - $f(x) = 0$;
   - $g(x) = 0$;
3. (a) Résoudre graphiquement : $f(x) \leq g(x)$.
   (b) En factorisant d'abord f résoudre par le calcul $f(x) \leq g(x)$.

EXERCICE 1.2.
Soit f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.

1. Étudier le signe de $f(x) - g(x) = x - x^2$.
2. En déduire l'intervalle sur lequel on a $f \leq g$.

EXERCICE 1.3 (Preuve que la fonction racine est strictement croissante)**.**
Soit $0 \leqslant a < b$.

1. Que peut-on dire alors de $b - a$?
2. Montrer que $b - a = (\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a})$.

3. Que peut-on dire du signe de $\sqrt{b}+\sqrt{a}$? En déduire le signe de $\sqrt{b}-\sqrt{a}$.
4. En déduire alors le sens de variation de la fonction racine.

EXERCICE 1.4 (Preuve de la propriété 1.5).
Montrer que si a et b sont deux nombres de D tels que $a<b$ et que f et g sont croissantes sur D, alors $(f+g)(a) \leq (f+g)(b)$. Conclure.
Même question lorsque f et g sont décroissantes sur D.

EXERCICE 1.5 (Preuve de la propriété 1.7).
Montrer que si a et b sont deux nombres de D tels que $a<b$, si f croissante sur D et si $k<0$ alors $kf(a) \geq kf(b)$. Conclure.

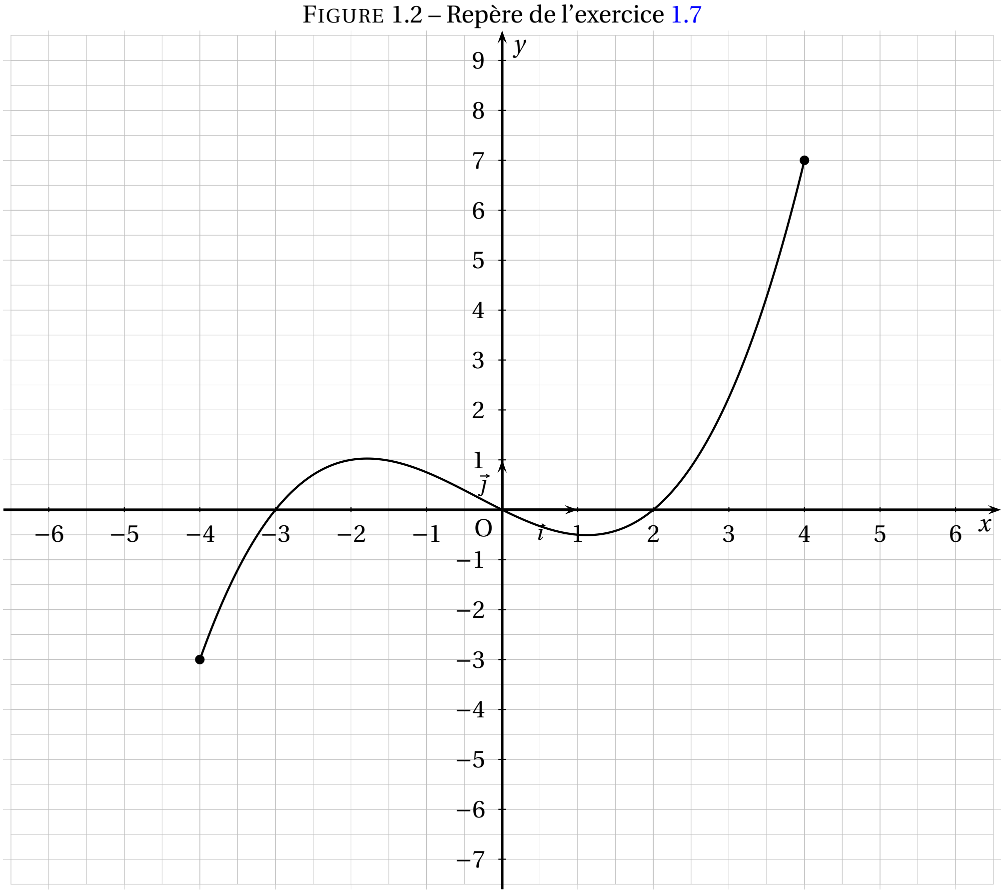
EXERCICE 1.6.

1. Donner une décomposition de la fonction f définie par $f(x)=(x-3)^2+2$ qui permette d'en déduire son sens de variation sur l'intervalle $]-\infty;3]$ et décrire simplement comment obtenir la courbe représentative de f à partir de celle d'une fonction de référence.
2. Mêmes questions pour les fonctions suivantes :
   - $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$;
   - $f(x)=(x+1)^3-1$;
   - $f(x)=3-(x+1)^2$;
   - $f(x)=3+\dfrac{1}{2+x}$;
   - $f(x)=1-\dfrac{1}{x-2}$;
   - $f(x)=-3\sqrt{x+1}$.

EXERCICE 1.7.
On a représenté sur la figure de la présente page la courbe d'une fonction f définie sur $[-4;4]$.
Tracer les courbes des fonctions suivantes :

- $u=f+2$;
- $v=-f$;
- $w(x)=f(x+2)$.

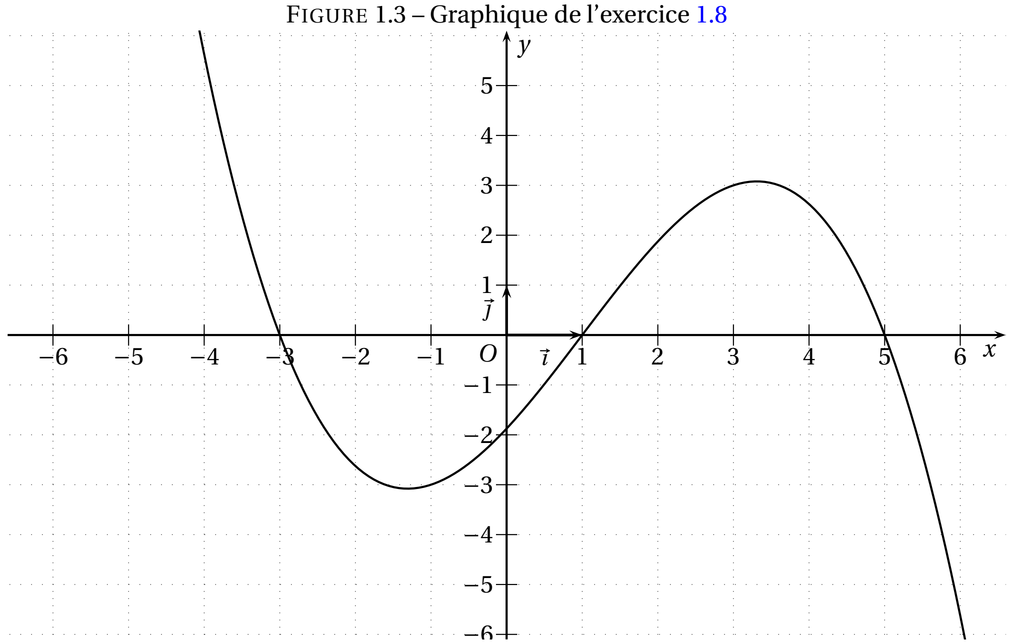
FIGURE 1.2 – Repère de l'exercice 1.7



EXERCICE 1.8.
On a représenté sur la figure 1.3 page suivante la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Y tracer les courbes des fonctions suivantes :

- $u=f-3$;
- $v=2f$;
- $w(x)=f(x-3)$;

FIGURE 1.3 – Graphique de l'exercice 1.8



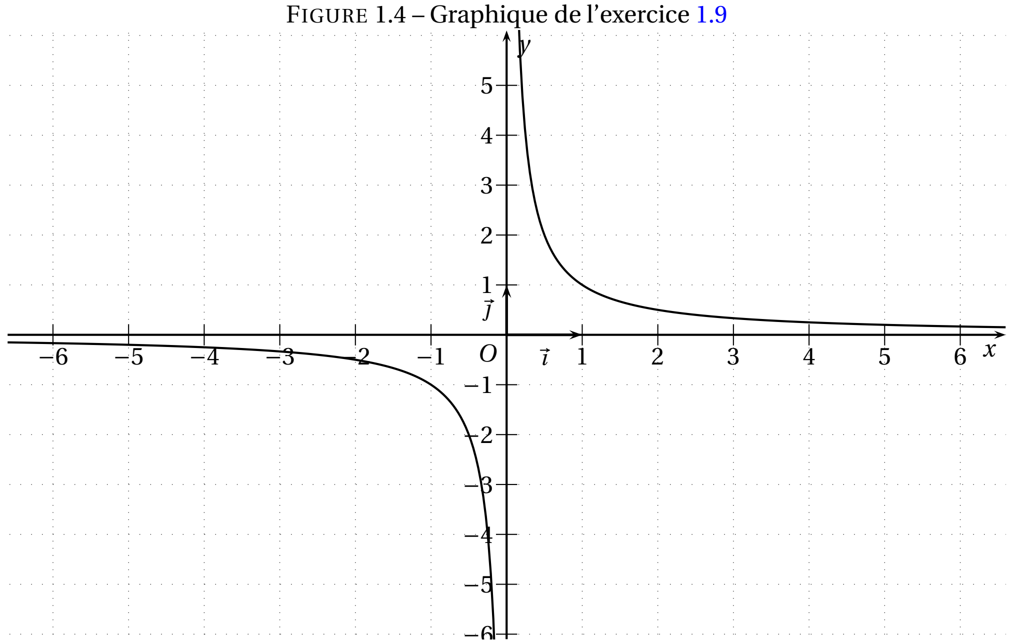
EXERCICE 1.9.

Soient f et g les fonctions définies par :

- $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$;
- $g(x) = \dfrac{3x-8}{x-3}$;
- $h(x) = \dfrac{2x-9}{x-4}$.

1. De quel type de fonction s'agit-il ?
2. Quels sont leurs ensembles de définition ?
3. Déterminer les réels a, b, c, d, e et f tels que, pour tout réel x :
   - $f(x) = a + \dfrac{b}{x}$;
   - $g(x) = c + \dfrac{d}{x-3}$
   - $h(x) = e + \dfrac{f}{x-4}$.
4. En déduire les tableaux de variations de ces fonctions.
5. À l'aide de transformations simples, tracer les courbes représentatives de ces fonctions à partir de la courbe de la fonction inverse donnée ci-dessous.

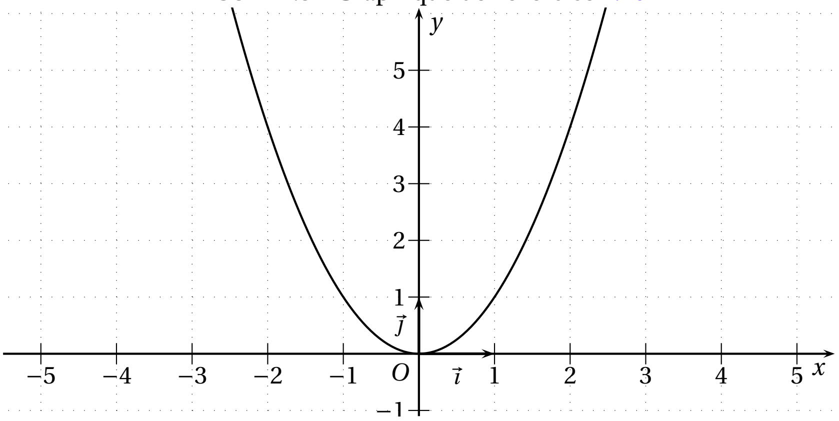
FIGURE 1.4 – Graphique de l'exercice 1.9



EXERCICE 1.10.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

1. De quel type de fonction s'agit-il ?
2. Quel est son ensemble de définition ?
3. (a) Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = (x-1)^2 + 3$.
   (b) En déduire le tableau des variations de f.
   (c) À l'aide de transformations simples, tracer la courbe représentative de f à partir de la courbe de la fonction carrée donnée ci-dessous.

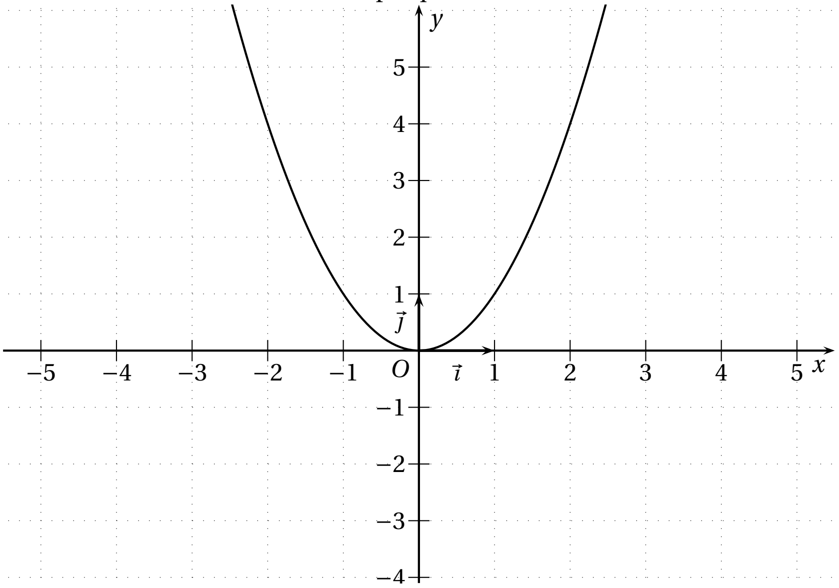
FIGURE 1.5 – Graphique de l'exercice 1.10



EXERCICE 1.11.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 - 4x + 1$.

1. De quel type de fonction s'agit-il ?
2. Quel est son ensemble de définition ?
3. (a) Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = -2(x+1)^2 + 3$.
   (b) En déduire le tableau des variations de f.
   (c) À l'aide de transformations simples, tracer la courbe représentative de f à partir de la courbe de la fonction carrée donnée ci-dessous.

FIGURE 1.6 – Graphique de l'exercice 1.11



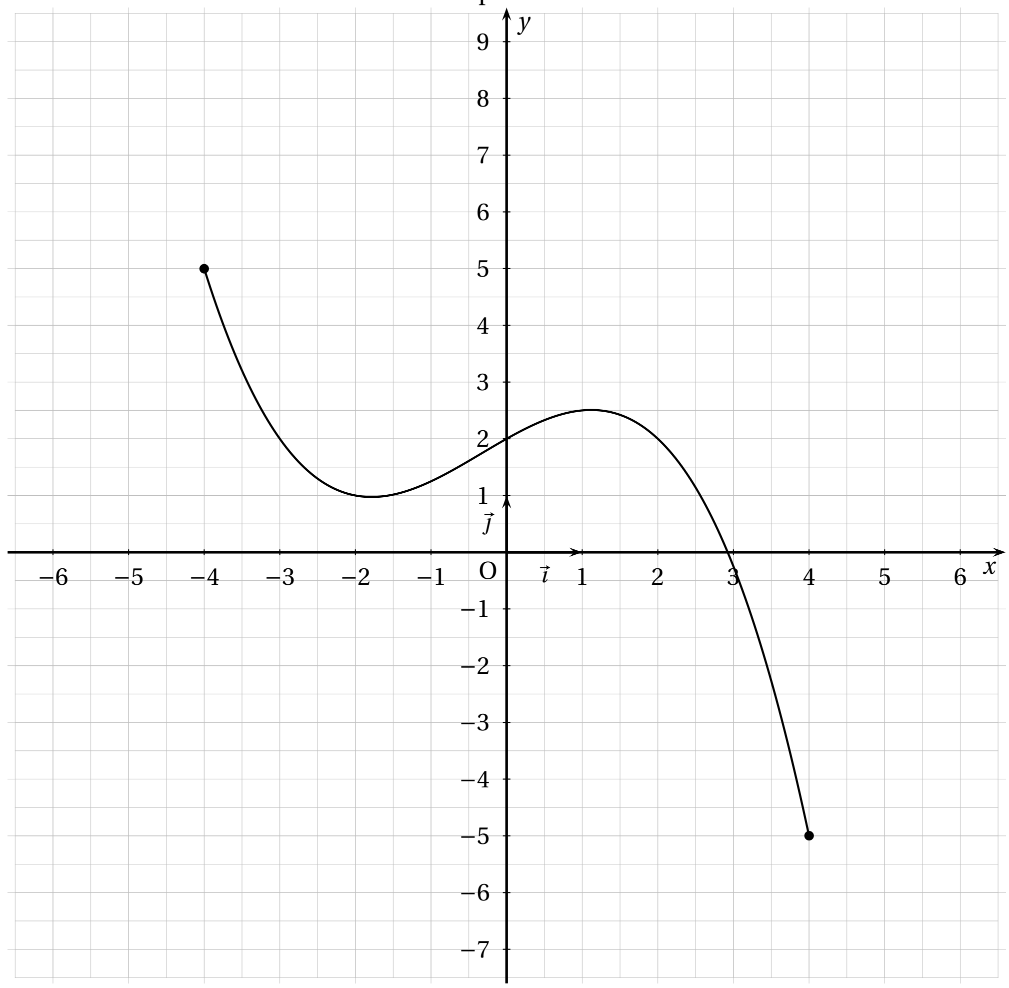
Devoir surveillé n°1

Généralités sur les fonctions

EXERCICE 1.1 (4,5 points)**.**
On a représenté sur la figure de la présente page la courbe d'une fonction f définie sur $[-4; 4]$.
Tracer les courbes des fonctions suivantes :

- $u = f + 3$;
- $v = -f$;
- $w(x) = f(x-2)$.

FIGURE 1.1 – Repère de l'exercice 1.1



EXERCICE 1.2 (6 points)**.**
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son tableau de variations en justifiant.

1. $f(x) = (x+2)^2 - 1$;
2. $g(x) = -\sqrt{x} + 3$;
3. $h(x) = -(x-2)^3 + 1$.

EXERCICE 1.3 (3,5 points)**.**
On donne les fonctions suivantes :

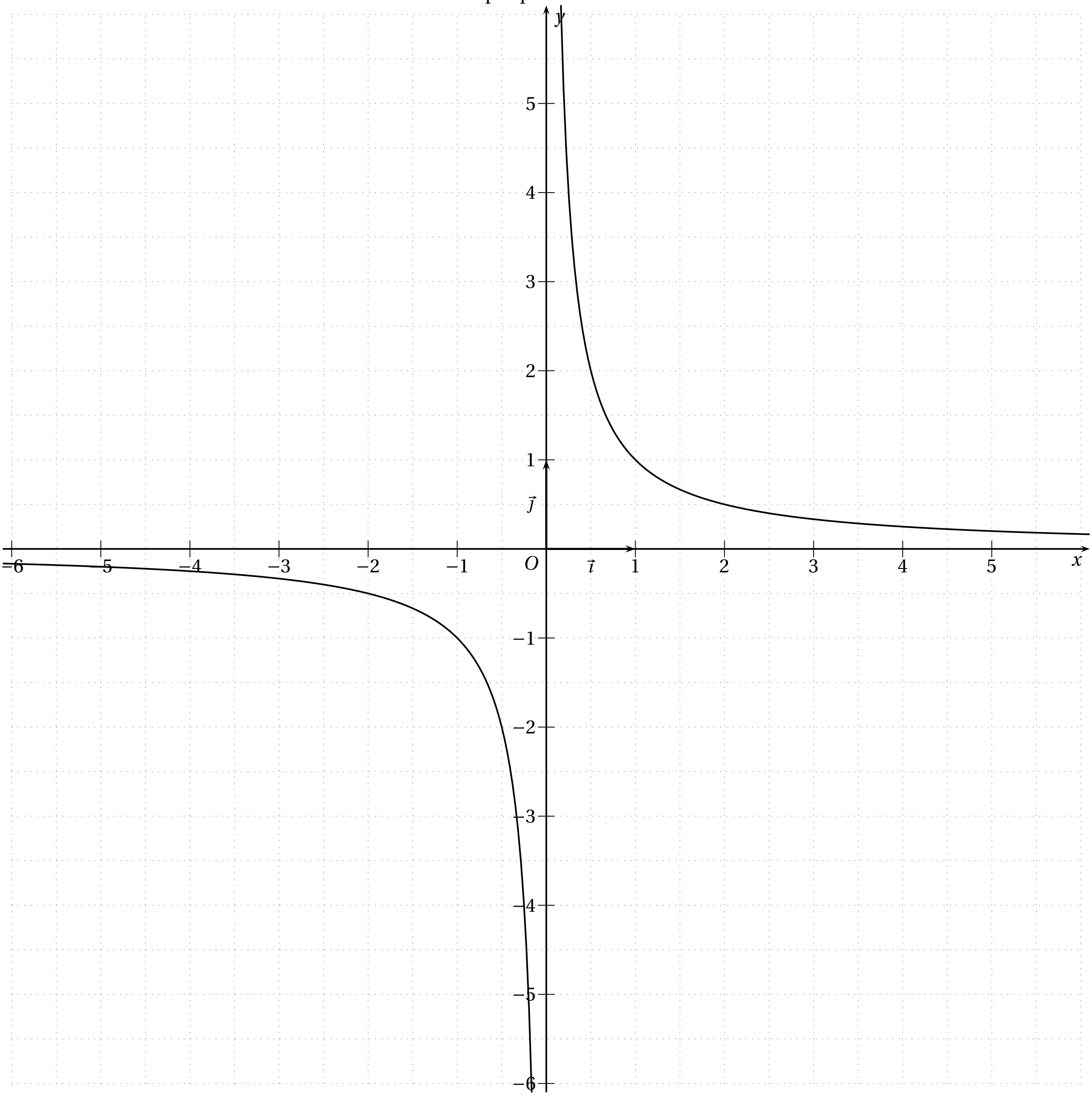
- $u(x) = -2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$;
- $v(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Quelles sont les variations de u ? *Justifier.*
2. Quelles sont les variations de v ? *Justifier.*
3. On pose $f = u + v$, définie sur $\mathbb{R}^*$. Quelles sont les variations de f ? *Justifier.*

EXERCICE 1.4 (6 points)**.**
Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$;

1. De quel type de fonction s'agit-il ?
2. Quel est son ensemble de définition ?
3. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x : $f(x) = a + \dfrac{b}{x-1}$.
4. À l'aide de transformations simples, tracer la courbe représentative de f à partir de la courbe de la fonction inverse donnée ci-dessous.

FIGURE 1.2 – Graphique de l'exercice 1.4



Chapitre 2

Pourcentages

Sommaire

2.1 Rappels et compléments

2.1.1 Activités

Activité 2.1.
Il y a 16 garçons dans une classe de 26 élèves. Quel est le pourcentage des garçons dans cette classe ?

Activité 2.2.
Au 1er janvier 2 000, trois villes ont une population de 25 000 habitants.

1. *Ville 1*
   (a) La population de la première ville augmente de 6 % en 2 000, en 2 001 et en 2 002.
   En déduire sa population au 1er janvier 2 003.
   (b) Par quel nombre la population a-t-elle été multipliée :
      i. entre le 1er janvier 2 000 et le 1er janvier 2 001 ?
      ii. entre le 1er janvier 2 001 et le 1er janvier 2 002 ?
      iii. entre le 1er janvier 2 002 et le 1er janvier 2 003 ?

   Ce nombre s'appelle le *coefficient multiplicateur* correspondant à une augmentation de 6 %.
   (c) Par quel nombre la population a-t-elle été multipliée entre le 1er janvier 2 000 et le 1er janvier 2 003 ?
   À quel pourcentage d'augmentation cela correspond-il ?
2. *Ville 2*
   Le 31 décembre 2 000, la deuxième ville a une population de 26 400 habitants.
   Calculer le coefficient multiplicateur correspondant et en déduire le pourcentage d'augmentation.
3. *Ville 3*
   La population de la troisième ville diminue de 6 % durant l'année 2 000.
   (a) Calculer sa population à la fin 2 000, puis le coefficient multiplicateur correspondant.
   (b) Si la population augmente de 6 % l'année suivante, calculer sa population à la fin 2 001.
   En déduire le pourcentage global d'évolution sur les deux années de début 2 000 à fin 2 001.

2.1.2 Pourcentage

Définition 2.1. Soit p et q deux réels où $q \neq 0$. Dire que p est égal à t % de q signifie que $\frac{p}{q} = \frac{t}{100}$.
t est appelé *le taux*.

Exemple. Dans l'activité on cherchait quel pourcentage (t) représentaient les 16 garçons (p) parmi 26 élèves (q). On a alors $\frac{16}{26} = \frac{t}{100}$ donc $t = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \times \ldots\ldots \approx \ldots\ldots$

Propriété 2.1. *Si p est égal à t % de q (où $q \neq 0$), alors $p = q \times \frac{t}{100}$*

Preuve. Si $q \neq 0$ alors $\frac{p}{q} = \frac{t}{100} \Leftrightarrow p = q \times \frac{t}{100}$. ◊

2.1.3 Évolutions en pourcentage

Définition 2.2. Dire qu'une quantité Q évolue de t %, où t est un réel quelconque, signifie que Q :
- augmente de t % si t est positif ;
- diminue de $|t|$ % si t est négatif.

Propriété 2.2. *Faire évoluer une quantité Q de t % revient à la multiplier Q par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.*
$k = \left(1 + \frac{t}{100}\right)$ *est appelé* coefficient multiplicateur *correspondant à une évolution de t %.*

Preuve. Soit Q la valeur de la grandeur avant l'évolution et Q' celle après l'évolution.
- Dans le cas d'une augmentation de t % où t est positif, c'est-à-dire dans le cas d'une évolution de t %, on a :
$Q' = Q + Q \times \frac{t}{100} = Q \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$.
- Dans le cas d'une diminution de t % où t est positif, c'est-à-dire dans le cas d'une évolution de $-t$ %, on a :
$Q' = Q - Q \times \frac{t}{100} = Q \times \left(1 - \frac{t}{100}\right) = Q \times \left(1 + \frac{-t}{100}\right)$.

◊

Propriété 2.3. *Le* taux d'évolution *t d'une grandeur passant de la valeur initiale $V_I \neq 0$ à la valeur finale V_F est donné par : $t = \frac{V_F - V_I}{V_I} \times 100$.*
Le coefficient multiplicateur *k d'une grandeur passant de la valeur initiale $V_I \neq 0$ à la valeur finale V_F est donné par : $k = \frac{V_F}{V_I}$.*
On a de plus $t = (k-1) \times 100$.

Preuve.
- $V_F = V_I \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) \Leftrightarrow V_F = V_I + V_I \times \frac{t}{100} \Leftrightarrow V_F - V_I = V_I \times \frac{t}{100} \Leftrightarrow \frac{V_F - V_I}{V_I} = \frac{t}{100} \Leftrightarrow t = \frac{V_F - V_I}{V_I} \times 100$.
- On a vu que $V_F = V_I \times k$ donc $k = \frac{V_F}{V_I}$.
- Par définition $k = 1 + \frac{t}{100} \Leftrightarrow k - 1 = \frac{t}{100} \Leftrightarrow t = (k-1) \times 100$.

◊

2.2 Techniques de base

EXERCICE 2.1.
1. Un lycéen a travaillé pendant les vacances. Sur sa feuille de paye est inscrit :
   - Salaire brut : 1 200,00 €
   - Retenue Sécurité Sociale : 151,20 €

   Quel pourcentage du salaire brut, la retenue représente-t-elle ?
2. En 2 004, la population active française comptait 27 455 000 individus, dont 12 680 000 femmes. Quel pourcentage de la population active représentaient les femmes ?
3. 28 % de la surface du territoire français, ce qui représente environ 154 000 km^2, est constitué de terrain boisé (forêts, etc.). Quelle est la surface totale du territoire français ?
4. Lors de l'achat d'un article coûtant 1 625 €, je dois verser un acompte de 130 €. Quel pourcentage de la somme totale cet acompte représente-t-il ?
5. Lors de l'achat d'un autre article, je dois verser un acompte de 15 %, et il me restera alors à débourser 1 700 €. Quel est le prix de cet article ?
6. (a) Dans la commune de Vachelle, sur 1 742 votants, 42 % ont choisi le candidat DESIRE. Combien cela fait-il de voix ?
   (b) M. DESIRE a obtenu 428 voix sur 1 312 votants à Port-Blanc et 323 voix sur 918 votants à Saint-André. Où a-t-il fait le meilleur score en pourcentage ?

EXERCICE 2.2.
Le tableau ci-dessous donne la répartition des filles dans trois classes de Première ES d'un Lycée.

Classe	A	B	C
Filles	10	8	9
Élèves	40	20	18

Déterminer la proportion de filles dans chacune des classes. Que constate-t-on ?

EXERCICE 2.3.
1. Une personne passe une petite annonce dans un journal diffusé dans 18 % des foyers d'un département. Elle passe aussi cette annonce dans un autre journal diffusé, lui, dans 25 % des foyers du département. À quelle condition cette personne peut-elle espérer que son annonce touche 43 % des foyers du département ? Pourquoi ?
2. Vrai ou faux ? Dans une entreprise 21 % des employés a moins de 25 ans et 36 % a plus de 45 ans ; donc 43 % du personnel de cette entreprise a entre 25 et 45 ans.
3. Dans cette entreprise, 40 % des employés ont suivi le stage de formation en comptabilité, tandis que 48 % ont suivi le stage d'anglais. Sachant que 35 % des employés ont suivi ces deux stages, quel pourcentage des employés de l'entreprise peut prétendre avoir suivi au moins l'un des deux stages ?
4. Vrai ou faux ? Dans cette même entreprise, 18 % des employés (hommes) a une ancienneté inférieure à 5 ans, tout comme 22 % des employées (femmes). Donc 40 % des employés de l'entreprise a une ancienneté inférieure à 5 ans.

2.3 Changement d'ensemble de référence

EXERCICE 2.4.
Dans un établissement scolaire, il y a 30 % de garçons et 30 % des filles sont internes. Sachant que le pourcentage d'internes dans l'établissement est de 27 %, quel est le pourcentage de garçons internes ?

EXERCICE 2.5.
Il y a 800 élèves au Lycée JACQUES CARTIER. dans ce Lycée :
- 15 % des élèves de Lycée sont des filles de Première ;
- 48 % des élèves de Première sont des filles ;
- 25 % des filles du Lycée sont en Première.

1. Calculer l'effectif des filles de Première.
2. En déduire l'effectif des élèves de Première, puis des filles dans ce Lycée.
3. Compléter le tableau des effectifs :

	Fille	Garçon	Total
Première			
Autres			
Total			

4. Calculer le pourcentage d'élèves de Première dans ce Lycée.

EXERCICE 2.6.
Dans une entreprise, 70 % des salariés sont des hommes, 6 % des femmes sont cadres et 4 % des hommes sont cadres.
1. Quel est le pourcentage des cadres dans cette entreprise ?
2. Faire un tableau, en pourcentages de salariés de l'entreprise, résumant la situation.
3. L'entreprise compte 23 cadres. Quel est le nombre total de salariés ?
4. Faire un tableau, en nombres de salariés de l'entreprise, résumant la situation.

EXERCICE 2.7.
1. Un Lycée compte 1 250 élèves ; 26 % d'entre eux sont en classe de Première et 24 % des élèves de Première sont en Première ES.
   (a) Quel calcul doit-on effectuer pour déterminer le nombre d'élèves de Première du Lycée ?
   (b) Quel calcul doit-on faire pour déterminer le nombre d'élèves en Première ES dans ce Lycée ?
   (c) Combien y a-t-il d'élèves en Première ES dans ce Lycée ? Quel pourcentage cela représente-t-il vis-à-vis de l'ensemble des lycéens ?
   (d) Quel calcul aurait-on pu faire directement pour déterminer ce pourcentage ?
2. 75 % des foyers d'un pays ont une connexion Internet, dont 80 % de type ADSL. Quel est le pourcentage de foyers équipés d'une connexion ADSL dans ce pays ?

3. Dans une population, 65 % des individus partent en vacances et 20 % de ceux qui partent en vacances vont à la montagne. Quelle est la proportion de départs à la montagne dans cette population ?

EXERCICE 2.8. 1. Considérons les statistiques (fictives) suivantes :
- en janvier 2 004 : 2 183 500 chômeurs, dont 624 200 jeunes (moins de 25 ans) ;
- en janvier 2 005 : 2 008 700 chômeurs, dont 617 400 jeunes.

Le nombre de chômeurs a-t-il diminué ? Le nombre de jeunes chômeurs a-t-il diminué ? Le pourcentage de jeunes chômeurs parmi l'ensemble des chômeurs a-t-il diminué ?

2. Voici les chiffres d'affaires d'une entreprise (fictive) pendant quatre ans :

Année	1 997	1 998	1 999	2 000
CA (en millions d'€)	35	38	41	44

(a) De combien de millions d'euros, d'une année sur l'autre, augmente le chiffre d'affaire ?

(b) De combien de millions d'euros en pourcentage, d'une année sur l'autre, augmente le chiffre d'affaire ?

2.4 Pourcentage d'évolution

EXERCICE 2.9. 1. Calculer les coefficients multiplicateurs dans chacun des cas suivants :
- hausse de 20 % ;
- baisse de 15 % ;
- hausse de 0,1 % ;
- baisse de 5,2 % ;
- hausse de 100 % ;
- baisse de 85 % ;
- hausse de 300 % ;
- baisse de 100 %.

2. Donner les pourcentages de hausse ou de baisse associés aux coefficients multiplicateurs suivants :
- 1,25 ;
- 0,98 ;
- 1,175 ;
- 3 ;
- 1,001 ;
- 1,01 ;
- 1,0049 ;
- 1,0101 ;
- 0,875 ;
- 0,5 ;
- 0,999 ;
- 0,1.

3. Donner le pourcentage d'évolution pour une grandeur qui passe :
- de 12 540 à 13 620 ;
- de 5,7 à 2,6 ;
- 21 000 à 84 000.

EXERCICE 2.10. 1. En août un loyer était de 564 €. Un an plus tard il est de 589 €. Quelle est son évolution en pourcentage ?

2. Le chiffre d'affaire d'une entreprise en 2 004 était de 124 000 €. En 2 005, les prévisions donnent un chiffre d'affaire de 117 000 €seulement. Quelle est son évolution en pourcentage ?
3. Pour un même produit, le magasin A propose 20 % de produit en plus pour la même prix et le magasin B propose 20 % de remise sur le prix pour une même quantité.
   Si 1 Kg de produit coûte 100 euros, quelle est la proposition la plus avantageuse pour le client ?
4. Après une augmentation de 15 %, un produit coûte 89,70 €. Quel était son prix initial ?

EXERCICE 2.11.
Dire que la TVA est de 19,6 % revient à dire que le prix hors taxe (HT) a été augmenté de 19,6 % de TVA pour obtenir le prix toutes taxes comprises (TTC).

1. Par quel nombre doit-on multiplier le prix HT pour obtenir le prix TTC ?
2. Un article vaut 120 € HT. Combien va-t-on le payer en magasin ?
3. Vous payez un article en magasin (donc TTC) à 200 €. À combien s'élève le prix HT et la TVA en € ?
4. Laquelle de ces deux propositions est la plus avantageuse :
   - Proposition 1 : Faire une remise de 10 % sur le prix HT, puis appliquer la TVA.
   - Proposition 2 : Appliquer la TVA, puis faire une remise de 10 % sur le prix TTC.

EXERCICE 2.12. 1. Au moment des soldes, un magasin propose une baisse de 10 % sur un article, suivie d'une nouvelle baisse de 20 % sur ce même article.
Ces deux diminutions peuvent être remplacées par une diminution unique. Déterminer le pourcentage de cette diminution.

2. Le prix d'un article augmente de 22 % puis diminue de 15 %. Quel est le pourcentage d'évolution de cet article ?
3. Le prix d'un produit subit successivement une hausse de 12 %, une baisse de 5 %, une baisse de 8 % et une hausse de 2 %. Quel est le pourcentage de variation final.
4. Si le nombre de chômeurs dans une ville diminue de 2 % par mois pendant un an, quel sera le pourcentage de diminution du nombre de chômeurs sur l'année ?
5. Un client veut acheter un véhicule qui coûtait 17 000 € le mois dernier mais qui, depuis, a augmenté de 4 %. Le vendeur consent une remise de 3,85 %. Le modèle coûte-t-il plus ou moins de 17 000 € ?

EXERCICE 2.13.
1. Après une augmentation de 5 % suivie d'une hausse de t %, on obtient une hausse globale de 17,6 %. Combien vaut t ?
2. À la bourse de Paris, l'action Renault :
   - a augmenté de 1,45 % entre le 10 juin 2 000 et le 11 juin 2 000 ;
   - a baissé de 0,5 % entre le 10 juin 2 000 et le 12 juin 2 000.

   Quelle a été son évolution entre le 11 juin 2 000 et le 12 juin 2 000 ?
3. Après deux augmentation successives de t % le prix d'un produit a globalement augmenté de 20 %. Combien vaut t ?
4. Après une augmentation de t % suivie d'une baisse de t %, on obtient une baisse globale de 4 %. Combien vaut t ?
5. Un article subit une augmentation de 10 %. Quel pourcentage de baisse doit-on appliquer pour compenser cette hausse ?

EXERCICE 2.14.
1. Est-il pertinent de dire que 3 augmentations successives de 2 % sont approximativement équivalentes à une augmentation globale de 6 % ?
2. Est-il pertinent de dire qu'une hausse de 1 % suivie d'une baisse de 3 % suivie d'une hausse de 2% sont approximativement équivalentes à une évolution globale de 0 % ?
3. Est-il pertinent de dire que 3 augmentations successives de 20 % sont approximativement équivalentes à une augmentation globales de 60 % ?

2.5 Indices

Les indices sont essentiellement utilisés dans des séries chronologies.
La valeur d'une grandeur observée une année ou un mois sert de référence (indice 100) et toutes les autres données (antérieures ou ultérieures) sont exprimées sous forme de pourcentage par rapport à cette année de référence.
Indices et grandeurs sont alors proportionnels.
Les indices sont particulièrement utiles pour comparer des évolutions de deux grandeurs quand les grandeurs ne sont pas du même ordre ou n'ont pas les mêmes unités (comparer PIB et population par exemple).

EXERCICE 2.15.
On veut connaître l'évolution du PIB par habitant en France depuis 1 990 qui servira d'année de référence.
On dispose du tableau suivant qu'on complètera au fur et à mesure par les réponses aux questions :

Année	1 990	1 991	1 992	1 993	1 994	1 995	1 996	1 997	1 998	1 999
PIB (en $)	1 195	1 201	1 322	1 250	1 331	1 535	1 554	1 406	1 447	1 432
Indice										

1. Calculer l'indice des années 1 991, 1 995, 1 996 et 1 999 (arrondis à 0,1).
2. En déduire le pourcentage d'évolution du PIB par habitant entre :
   - 1 990 et 1 991 ;
   - 1 990 et 1 995 ;
   - 1 990 et 1 999 ;
3. Quel est le pourcentage d'évolution du PIB par habitant entre 1 994 et 1 999 ?
4. Quelle est l'unité de l'indice ?

EXERCICE 2.16.
Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice des prix à la consommation en France entre 1 998 et 2 004 en prenant pour année de base l'année 1 998 (indice 100) (*source : INSEE*) :

Année	1 998	1 999	2 000	2 001	2 002	2 003	2 004
Indice	100	100,5	102	103,5	105,6	107,6	109,3

1. Donner l'évolution globale des prix consommés par les ménages entre :
   - 1 998 et 1 999 ?
   - 1 998 et 2 004 ?
   - 2 000 et 2 004 ?
   - 1 998 et 2 001 ?
   - 2 000 et 2 002 ?
2. Reconstruire un tableau donnant l'évolution de l'indice des prix entre 2 000 et 2 004, en prenant 2 000 comme année de référence (indice 100).

EXERCICE 2.17.
Le tableau suivant indique l'évolution du PIB base 100 en 1 980 aux États-Unis (EU), au Japon et dans l'Union Européenne (UE) :

Année	1 980	1 990	1 999
EU	100	132,6	172,3
Japon	100	155,2	166,0
UE	100	126,8	146,8

1. Donner le pourcentage d'évolution du PIB aux EU entre 1 980 et 1 990 puis entre 1 980 et 1 999. Faire de même pour le PIB du Japon et dans l'UE.
2. Pour les EU, calculer l'indice du PIB en 1 999 base 100 en 1 990. faire de même pour le Japon et l'UE (valeurs arrondies à 0,1 près).
3. Si le PIB aux EU était de 5 554 milliards de dollars en 1 990, calculer le PIB en 1 980 et en 1 999 (valeurs arrondies au milliard de dollars).
4. Peut-on dire que le PIB du Japon est supérieur à celui de l'UE ?

EXERCICE 2.18.
Le tableau ci-dessous donne les indices de production de deux entreprises (base 100 le 31/12/1 992).

Année	1 992	1 993	1 994	1 995	1 996	1 997	1 998	1 999
Entreprise A	100	105	110	110	98	95	100	110
Entreprise B	100	96	97	101	110	106	110	112

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier brièvement votre réponse.
   (a) Les deux entreprises ont eu la même production au cours de l'année 1 992.
   (b) L'entreprise B n'a connu que deux années de baisse de sa production.
   (c) L'évolution en pourcentage de l'entreprise A a été la même en 1 993 et en 1 994.
2. Pour chacune des deux entreprises, en indiquant les calculs effectués, déterminer :
   - le taux d'évolution de la production sur la période 1 992-1 997 ;
   - le taux d'évolution de la production sur la période 1 997-1 999.

EXERCICE 2.19.
Les quatre premiers pays producteurs de gaz naturel et leur production en millions de m^3 sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	1 990	2 002	2 003
Russie	641 000	595 300	616 500
États-unis	504 900	537 000	541 000
Canada	106 800	187 800	180 500
Royaume-Uni	49 600	102 600	102 800

Source : Comité professionnel du pétrole Cédigaz.

1. Reproduire ce tableau en affectant pour chaque année l'indice 100 à la Russie. Quelle évolution étudie-t-on dans ce cas ?
2. Reproduire ce tableau en affectant pour chaque pays l'indice 100 à l'année 2 002. Quelle évolution étudie-t-on dans ce cas ?

Devoir surveillé n°2

Pourcentages

Toutes les réponses sont à porter sur le sujet. Ne pas oublier d'indiquer son nom.

EXERCICE 2.1 (5 points).
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, trois réponses sont proposées. Une seule des réponses proposées est correcte.
On demande de cocher celle que vous pensez être correcte sachant qu'une réponse juste rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point et qu'une absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.

1. Dans une classe, 37 % des élèves pratiquent du tennis, 16 % de la natation et 10 % ces deux sports. Combien en pratiquent au moins un des deux :
   ❒ 53 % ❒ 43 % ❒ 63 %
2. 50 % de 30 % d'une quantité initiale, c'est
   ❒ 15 % de la quantité initiale ❒ 20 % de la quantité initiale ❒ 80 % de la quantité initiale
3. Multiplier une quantité par 2 c'est :
   ❒ l'augmenter de 200 % ❒ l'augmenter de 2 % ❒ l'augmenter de 100 %
4. Augmenter de 20 % puis la diminuer de 20 %, c'est :
   ❒ revenir à la valeur initiale ❒ augmenter de 4 % ❒ diminuer de 4 %
5. Une quantité qui subit deux baisses successives de 6 % et de 5 %, diminue de :
   ❒ 10,7 % ❒ 5,5 % ❒ 11 %

EXERCICE 2.2 (7 points).
Il y a 800 élèves au Lycée PIERRE BOURDIEU. Dans ce Lycée :

- 30 % des élèves sont en Première ;
- 22,5 % des élèves de Lycée sont des filles de Seconde ;
- 60 % des élèves de Seconde sont des filles ;
- 37,5 % des filles du Lycée sont en Seconde.

1. Calculer l'effectif des élèves de Première.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Calculer l'effectif des filles de Seconde.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
3. En déduire l'effectif des élèves de Seconde, puis des filles dans ce Lycée.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
4. Sachant qu'il y a autant de filles en Première et en Terminale, compléter le tableau des effectifs ci-dessous :

	Fille	Garçon	Total
Seconde			
Première			
Terminale			
Total			

EXERCICE 2.3 (6 points).

Les prix seront donnés au centime d'euro. Les taux seront arrondis au dixième. Les questions sont indépendantes.

1. Après une baisse de 10 % un article coûte 40 €. Quel était son prix initial ?

   ...

2. Un article augmente de 30 %. De combien devra-t-il baisser pour retrouver son prix initial ?

   ...

3. Un prix subit deux évolutions successives : une augmentation de 10 % puis une baisse de t %. Après ces deux évolution, par rapport à sa valeur de départ, il a baissé de 5 %. Déterminer t.

   ...

4. Deux hausses successives de t % équivalent à une hausse de 15 %. Déterminer t.

   ...

EXERCICE 2.4 (2 points).

Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

En 2000, la TVA sur les travaux est passée de 19,6 % du prix hors taxes à 5,5 % du prix hors taxes. Pour la construction d'un mur, M. Machin avait un devis de 2 135 €toutes taxes comprises. Combien devra-t-il payer maintenant compte tenu de la baisse de TVA ?

...

Chapitre 3

Second degré

Sommaire

3.1 Activités

Activité 3.1.
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement $f(x) = 2x^2 - x - 1$ et $g(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$.

1. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = g(x)$.
2. En déduire le tableau des variations de f et son extremum.
3. En déduire les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = 0$.
4. En déduire le signe de f selon les valeurs de x

On vient de voir, sur un exemple, que lorsqu'une fonction trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est écrite sous la forme $f(x) = \alpha(x+\beta)^2 + \gamma$, alors il est plus facile d'en étudier les caractéristiques. Essayons alors d'exprimer α, β et γ en fonction de a, b et c.

Activité 3.2 (Cas général)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels, avec $a \neq 0$.

1. Développer $\alpha(x+\beta)^2 + \gamma$.
2. En déduire que $f(x) = \alpha(x+\beta)^2 + \gamma$ si et seulement si α, β et γ sont les solutions du système :
$$\begin{cases} a = \alpha \\ b = 2\alpha\beta \\ c = \alpha\beta^2 + \gamma \end{cases}$$
3. En déduire que :
$$\begin{cases} \alpha = a \\ \beta = \dfrac{b}{2a} \\ \gamma = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \end{cases}$$

3.2 Trinôme

3.2.1 Définition, forme développée

Définition 3.1. On appelle *trinôme* toute expression qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$. Cette forme s'appelle la *forme développée* du trinôme.

3.2.2 Forme canonique

Théorème 3.1. *Tout trinôme ax^2+bx+c peut s'écrire sous la forme $\alpha(x+\beta)^2+\gamma$ où α, β et γ sont des réels. Cette forme s'appelle la* forme canonique *du trinôme.*

Preuve. L'activité 3.2 a montré que $\alpha = a$, $\beta = \frac{b}{2a}$ et $\gamma = -\frac{b^2-4ac}{4a}$. ◊

Remarque. Pour alléger les écritures, et parce que cette quantité aura un rôle important plus tard, on notera : $\Delta = b^2-4ac$.

La forme canonique devient alors :

Propriété 3.2.

$$\text{Si } a \neq 0 \text{ alors } ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \qquad \text{où } \Delta = b^2-4ac$$

3.2.3 Racines et discriminant

Définitions 3.2. Soit un trinôme ax^2+bx+c. On appelle :
- *racine* du trinôme tout réel solution de l'équation $ax^2+bx+c=0$;
- *discriminant* du trinôme, noté Δ, le nombre $\Delta = b^2-4ac$.

Propriété 3.3. *Soit ax^2+bx+c un trinôme et $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant.*
- *Si $\Delta < 0$, alors le trinôme **n'a pas de racine**.*
- *Si $\Delta = 0$, alors le trinôme a **une unique racine** : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.*
- *Si $\Delta > 0$, alors le trinôme a **deux racines** : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$*

Remarques.
- Le signe de Δ permet *discriminer* les équations de type $ax^2+bx+c=0$ qui ont zéro, une ou deux solutions, c'est la raison pour laquelle on l'appelle le *discriminant*[1].
- Si $\Delta = 0$ les formules permettant d'obtenir x_1 et x_2 donnent $x_1 = x_0$ et $x_2 = x_0$; pour cette raison, on appelle parfois x_0 la *racine double* du trinôme.

Preuve. $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$ donc $(\mathscr{E}) : ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$

- $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c$ est égal à la somme de deux quantités positives (la seconde strictement) $\Leftrightarrow ax^2+bx+c > 0 \Leftrightarrow (\mathscr{E})$ n'a pas de solution. Or $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta}{4a^2} < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$.
- $-\frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. Donc $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}$. $(\mathscr{E})$ a une unique solution. Or $-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \Leftrightarrow \Delta = 0$.
- $-\frac{\Delta}{4a^2} < 0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c$ est de la forme $a(A^2-B^2)$ donc :
  $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow (A^2-B^2)=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)$
  donc deux solutions :
  1. $x = -\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}} = -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$.
     Donc, si $a>0$, $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et, si $a<0$, $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  2. $x = -\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = -\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}} = -\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$.
     Donc,si $a>0$, $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et, si $a<0$, $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

  Donc, dans tous les cas, $\mathscr{E}$ a deux solutions qui sont $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Or $-\frac{\Delta}{4a^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta}{4a^2} > 0 \Leftrightarrow \Delta > 0$.

◊

3.2.4 Forme factorisée, signe d'un trinôme

Propriété 3.4. *Soit ax^2+bx+c un trinôme.*
- *Si le trinôme a deux racines x_1 et x_2 alors $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.*
- *Si le trinôme a une racine x_0 alors $ax^2+bx+c = a(x-x_0)(x-x_0) = a(x-x_0)^2$.*
- *Si le trinôme n'a pas de racine, il n'a pas de forme factorisée.*

Cette écriture, lorsqu'elle existe, est appelée forme factorisée *du trinôme.*

1. Discriminer. *v. tr.* Faire la discrimination, c'est-à-dire l'action de distinguer l'un de l'autre deux objets, ici des équations

Preuve. On a obtenu les formes factorisées dans la démonstration précédente. ◇

Propriété. *Soit ax^2+bx+c un trinôme.*
- *Si le trinôme n'a pas de racine, ax^2+bx+c est strictement du signe de a pour tout x.*
- *Si le trinôme a une racine, ax^2+bx+c est strictement du signe de a pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$ et s'annule en $-\frac{b}{2a}$.*
- *Si le trinôme a deux racines x_1 et x_2, ax^2+bx+c est :*
  - *strictement du signe de a quand $x \in]-\infty ; x_1[\cup]x_2 ; +\infty[$;*
  - *strictement du signe opposé de a quand $x \in]x_1 ; x_2[$;*
  - *s'annule en x_1 et en x_2.*

On peut aussi énoncer cette propriété de la façon synthétique suivante :

Propriété 3.5. *Un trinôme ax^2+bx+c est du signe de a sauf entre les racines, si elles existent.*

Preuve. On a vu que $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$
- Dans le cas où $\Delta < 0$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ est la somme de deux quantités positives, la seconde strictement, donc le signe de ax^2+bx+c est strictement celui de a.
- Dans le cas où $\Delta = 0$, $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, donc le signe de ax^2+bx+c est celui de a. Plus précisement : il ne s'annule qu'en $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et est sinon strictement du signe de a.
- Dans le cas où $\Delta > 0$, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines. En supposant que $x_1 < x_2$ (sinon il suffit d'inverser les racines), le tableau de signe ci-desous donne le résultat.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x-x_1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-x_2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

◇

3.3 Fonction trinôme

3.3.1 Définition

Définition 3.3. On appelle *fonction trinôme* une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, qui à x associe $f(x) = ax^2+bx+c$ où $a \neq 0$.

3.3.2 Sens de variation

Propriété 3.6. *Soit $f(x) = ax^2+bx+c$ une fonction trinôme. Alors f a les variations résumées dans les tableaux ci-dessous :*
- *Si $a > 0$:*

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↗	$+\infty$

- *Si $a < 0$:*

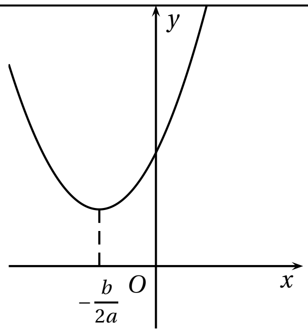
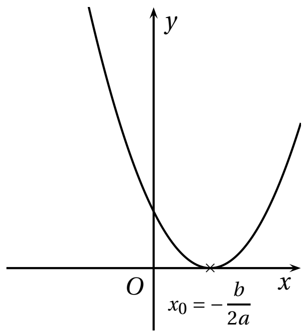
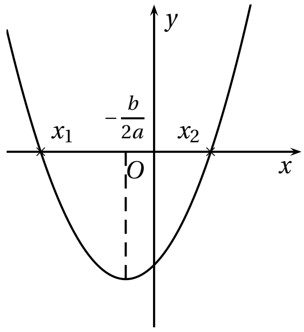
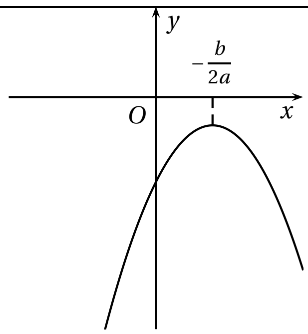
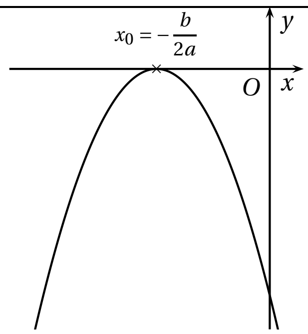
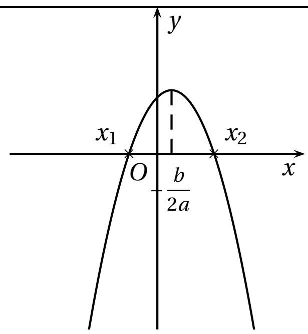
x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↘	$-\infty$

Preuve. Écrite sous forme canonique $f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, toute fonction trinôme est une fonction associée à la fonction carrée. Or :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		↘	0	↗	

En utilisant les propriétés sur les fonctions associées vues dans le chapitre 1, on obtient le tableau des variations de la propriété. ◇

3.4 Bilan

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td colspan="3">$\Delta = b^2 - 4ac$</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$</td><td>$\Delta = 0$</td><td>$\Delta > 0$</td></tr>
<tr><td>$ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$</td><td>$ax^2 + bx + c = 0$ a une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$</td><td>$ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td></tr>
<tr><td>$ax^2 + bx + c$ n'a pas de racine
Aucune factorisation</td><td>$ax^2 + bx + c$ a une racine double
$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$</td><td>$ax^2 + bx + c$ a deux racines
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Si $a > 0$</td><td colspan="3"><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $\quad -\frac{b}{2a} \quad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td>$\searrow \quad \nearrow$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$ax^2 + bx + c > 0$ sur $\mathbb{R}$</td><td>$ax^2 + bx + c \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$</td><td>$ax^2 + bx + c \geqslant 0$ sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ sur $[x_1; x_2]$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Si $a > 0$</td><td colspan="3"><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $\quad -\frac{b}{2a} \quad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td>$\nearrow \quad \searrow$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$ax^2 + bx + c < 0$ sur $\mathbb{R}$</td><td>$ax^2 + bx + c \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$</td><td>$ax^2 + bx + c \leqslant 0$ sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ sur $[x_1; x_2]$</td></tr>
</table>

3.5 Exercices et problèmes

EXERCICE 3.1.
Résoudre dans $\mathbb{R}$, sans utiliser les propriétés des trinômes, les équations suivantes :

- $x^2 = 9$;
- $x^2 = -3$;
- $(x-5)^2 = 3$;
- $(5x-4)^2 - (3x+7)^2 = 0$;
- $(3x+5)^2 = (x+1)^2$;
- $(2x-1)^2 + x(1-2x) = 4x^2 - 1$.

EXERCICE 3.2.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $4x^2 - x - 3 = 0$;
- $(t+1)^2 + 3 = 0$;
- $x^2 + 10^{50}x + 25 \times 10^{98} = 0$;
- $x^2 + 3x = 0$;
- $4x^2 - 9 = 0$;
- $x^2 + 9 = 0$;
- $x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$;
- $x^3 + 2x^2 - 4x = 0$
- $2(2x+1)^2 - (2x+1) - 6 = 0$.

EXERCICE 3.3.
On note $P(x) = -2x^2 - x + 1$.

1. Résoudre $P(x) = 0$.
2. Factoriser $P(x)$.
3. Résoudre $P(x) \leq 0$.

EXERCICE 3.4.
Résoudre les équations suivantes :

- $\dfrac{2x-5}{x-1} = \dfrac{x-1}{x+1}$
- $\dfrac{x^2 - x + 1}{x+2} = 2x + 3$

EXERCICE 3.5.
Résoudre les inéquations suivantes :

- $-2x^2 + 7x - 5 \leqslant 0$;
- $\dfrac{3x^2 + x + 1}{x^2 - 3x - 10} > 0$.
- $-x^2 + 9x + 22 \geqslant 0$;
- $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{-x^2 + 2x + 3} \geqslant 0$

PROBLÈME 3.1.
Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 13x + 15$.

1. Montrer que $x = -1$ est racine de ce polynôme.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.
3. (a) Terminer la factorisation de $f(x)$.
   (b) Résolvez l'inéquation $f(x) > 0$.

PROBLÈME 3.2.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Précisez la nature de la courbe $\mathscr{C}$ et les coordonnées de son sommet S.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points A et B dont on précisera les coordonnées.
3. Pour quelles valeurs de x la courbe $\mathscr{C}$ est-elle situé au dessus de l'axe des abscisses ?

PROBLÈME 3.3.
Une entreprise produit de la farine de blé.
On note q le nombre de tonnes de farine fabriquée avec $0 < q < 80$.
On appelle $C(q)$ le coût total de fabrication, $R(q)$ la recette obtenue par la vente et $B(q)$ le bénéfice obtenu par la vente de q tonnes de farine.

1. Sachant que chaque tonne est vendue 120 €, exprimer $R(q)$ en fonction de q.
2. Sachant que $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$:
   (a) déterminer la quantité de farine à produire pour que la production soit rentable ;
   (b) la production correspondant au bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice.

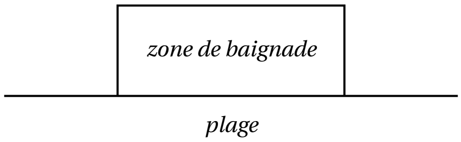
PROBLÈME 3.4.
Une mutuelle complémentaire propose à ses adhérents le mode de remboursement suivant : lorsque la sécurité sociale a remboursé t % des frais de maladie, la mutuelle rembourse à l'adhérent t % de ce qui reste à sa charge .
Madame Martin, sur l'une de ses feuilles de remboursement de frais, constate que le taux global de remboursement de ses frais est 87,75 %. Quel est le taux de remboursement de la sécurité sociale ?

PROBLÈME 3.5.
Trouver deux nombres dont la somme est égale à 57 et le produit égal à 540.

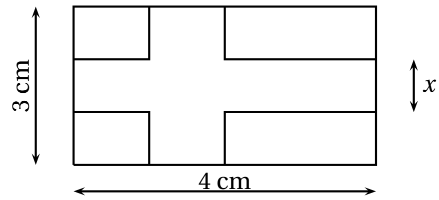
PROBLÈME 3.6.
Une société de livres par correspondance a actuellement 10 000 abonnés qui paient chacun 50 € par an. Une étude a montré qu'une augmentation (respectivement une diminution) de 1 € du prix de l'abonnement annuel, entraîne une diminution (respectivement une augmentation) de 100 abonnés.
On se propose de trouver comment modifier le prix de l'abonnement annuel pour obtenir le maximum de recette.
n désigne la variation du prix de l'abonnement annuel en euros (n est un entier relatif).

1. Exprimer, en fonction de n, le prix de l'abonnement annuel et le nombre d'abonnés correspondant.
2. Exprimer, en fonction de n, la recette annuelle de cette socité, notée $R(n)$.
3. Déterminer la valeur de n pour laquelle $R(n)$ est maximum.
   Quel est alors le montant de l'abonnement annuel, le nombre d'abonnés et la recette totale correspondante ?

PROBLÈME 3.7.
Une zone de baignade rectangulaire est délimitée par une corde (agrémentée de bouées) de longueur 50 m. Quelles doivent être les dimensions de la zone pour que la surface soit maximale ?



PROBLÈME 3.8.
Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau ?



Devoir surveillé n°3

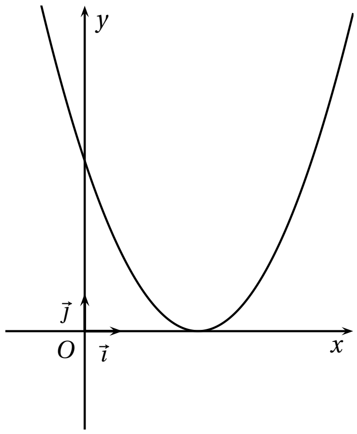
Second degré

EXERCICE 3.1 (3 points)**.**
On donne ci-dessous les représentations graphiques de trois fonctions du second degré f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

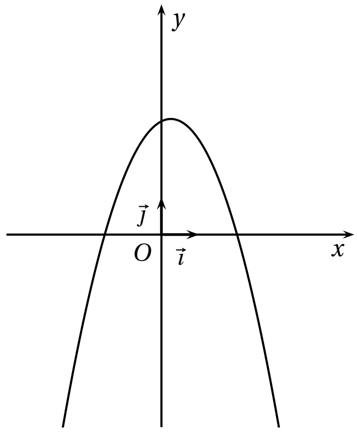
Dans chacun des cas, indiquer le signe de a, si le discriminant Δ du trinôme est strictement positif, strictement négatif ou nul et le nombre de racines.

Cas 1



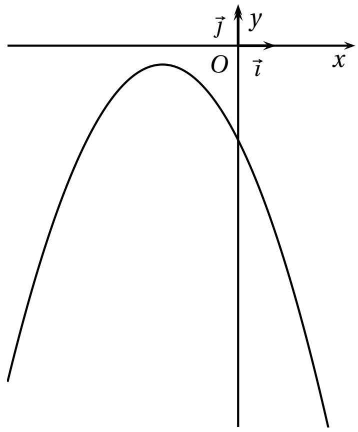
Signe de a : ....
Signe de Δ : ....
Nombre de racines : ....

Cas 2



Signe de a : ....
Signe de Δ : ....
Nombre de racines : ....

Cas 3



Signe de a : ....
Signe de Δ : ....
Nombre de racines : ....

EXERCICE 3.2 (6 points)**.**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$-x^2 - 16x - 16 = 0$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

$$3x^2 + x + 1 = 0$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

$$x^2 - x - 1 = 0$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

EXERCICE 3.3 (5 points)**.**
On cherche à résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{-x^2+x+2}{2x^2+5x-3} \geqslant 0$$

1. Étudier le signe de $-x^2+x+2$ selon les valeurs de x.
2. Étudier le signe de $2x^2+5x-3$ selon les valeurs de x.
3. À l'aide d'un tableau de signe, étudier le signe de $\frac{-x^2+x+2}{2x^2+5x-3}$ selon les valeurs de x et conclure.

EXERCICE 3.4 (6 points)**.**
Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 - x^2 + 13x - 6$.
On cherche les valeurs de x telles que $f(x) > 0$.

1. Montrer que 2 est une racine de ce polynôme.
2. Montrer que $f(x) = (x-2)(-2x^2-5x+3)$
3. (a) Terminer la factorisation de $f(x)$.

   (b) Déterminer le signe de $f(x)$ en fonction de x.

   (c) Conclure.

Chapitre 4

Statistiques

Sommaire

4.1 Rappels de Seconde

4.1.1 Vocabulaire

Définition 4.1. Une série statistique est un ensemble d'observations collectées et on a les définitions suivantes :
- *Population* : C'est l'ensemble sur lequel porte une étude statistique ;
- *Individu* : C'est un élément de la population ;
- *Caractère* : C'est ce qu'on observe chez l'individu ;
- *Modalité* : Ce sont les différentes valeurs prises par le caractère ;
- La série statistique est dite *quantitative* quand les modalités sont des nombres et *qualitative* sinon ;
- Dans le cas d'une série quantitative, celle-ci est dite *discrète* si les modalités sont limitées à un ensemble fini de valeurs et *continue* si les modalités peuvent prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle.

Exemples. • On peut s'intéresser à une classe (population), comportant des élèves (individus) et observer leur nombre de frères et sœurs (caractère) qui peuvent être 0, 1, 2, ... (modalités), ces données formant alors une série statistique quantitative discrète.
- On peut s'intéresser à une chaîne d'usine produisant des bras de suspension pour voiture (population), et observer sur chaque pièce (individu) ses dimensions exactes (caractère) qui peuvent varier entre 500 et 750 mm (modalités), ces données formant alors une série statistique quantitative continue.
- On peut s'intéresser à la population française (population dont on prendra un échantillon) comportant des individus (individus) et estimer leur intention de vote (caractère) pouvant être n'importe lequel des candidats se présentant (modalités), ces données formant alors une série statistique qualitative.

Définition 4.2. On a aussi :
- Effectif d'une valeur : C'est le nombre de fois que la valeur d'un caractère (la modalité) revient dans la série ;
- Fréquence d'une valeur : C'est l'effectif de la modalité divisé par l'effectif total ; elle est comprise entre 0 et 1.
- Classes de valeurs : s'il y a trop de valeurs différentes, elles sont rangées par *classe* (intervalle), l'effectif de la classe étant alors le nombre de modalités appartenant à cet intervalle.

4.1.2 Mesures centrales

Elles visent à résumer la série par une seule valeur qu'on espère représentative de toutes les valeurs de la série.
En Seconde vous en avez vu trois : le mode, la moyenne, la médiane.

Définition 4.3 (Mode)**.** Le *mode* d'une série statistique est la donnée la plus fréquente de la série.

Remarques. • S'il y a plusieurs données arrivant à égalité, il y a plusieurs modes.
- Si les données sont rangées en classe, on parle de *classe modale*.
- Le mode est défini aussi bien pour les séries quantitatives que qualitatives.

Définition 4.4 (Moyenne arithmétique)**.** La *moyenne arithmétique* d'une série statistique quantitative $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est le nombre, souvent noté $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Remarques. • La somme de toutes les valeurs de la série est inchangée si on remplace chaque valeur par $\overline{x}$.
- On note parfois $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$
- Si la série S comporte n données selon p modalités $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'effectifs respectifs (ou de fréquences respectives) n_1, n_2, ..., n_p, alors $\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_px_p}{\underbrace{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}_{\text{effectif total}}}$

La moyenne a des avantages calculatoires : si l'on connaît les moyennes et les effectifs de deux séries (ou deux sous-séries), on peut obtenir la moyenne de la série constituée l'agrégation de ces deux séries. Elle a le défaut d'être très sensible aux valeurs extrêmes.

Définition 4.5 (Médiane)**.** On appelle *médiane* d'une série statistique quantitative tout nombre m tel que :
- la moitié au moins des valeurs de la série est inférieure à m
- la moitié au moins des valeurs de la série est supérieure à m

Propriété 4.1. *Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ telles que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.*
- *Si n est impair, le $\frac{n+1}{2}^{\text{ième}}$ élément de la série convient comme médiane : $m = x_{\frac{n+1}{2}}$*
- *Si n est pair, tout nombre compris entre le $\frac{n}{2}^{\text{ième}}$ et le $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{ième}}$ élément de la série est* **une** *médiane. On prend généralement $m = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$*

On a aussi :

Propriété 4.2. *Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ telles que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Alors la donnée de rang $E\left(\frac{1}{2}n\right) + 1$ convient toujours comme médiane.*

Remarque. $E(x)$ est la partie entière de x, c'est-à-dire, pour un nombre positif, le nombre sans sa partie décimale.

La médiane a l'avantage de ne pas être influencée par les valeurs extrêmes. Elle n'a aucun avantage pratique dans les calculs, puisque pour connaître la médiane d'une série constituée de l'agrégation de deux séries, il faut nécessairement re-ordonner la nouvelle série pour trouver sa médiane, qui n'aura pas de lien avec les deux médianes des deux séries initiales.

4.1.3 Mesures de dispersion

Les valeurs extrêmes et l'étendue ont été vues en Seconde. Ce sont des mesures de dispersion :

Définition 4.6. Les valeurs extrêmes d'une série sont ses valeurs minimale et maximale et l'étendue est la différence entre les valeurs extrêmes de la série.

Un des objectifs de la première est de les compléter par d'autres mesures plus fines.

4.2 Un problème

Le couple moyenne-médiane fournit de bonnes informations sur une série dans certains cas :
- Si la moyenne est supérieure à la médiane, on peut conjecturer que les données supérieures à la médiane sont éloignées de celle-ci ou que les données inférieures à la médiane sont proches de celle-ci (le mode peut alors indiquer laquelle de ces deux possibilités est la plus probable) ; si la moyenne est très supérieure à la médiane on peut conjecturer que les deux facteurs jouent.
- Si la moyenne est inférieure à la médiane, on peut conjecturer que les données supérieures à la médiane sont proches de celle-ci ou que les données inférieures à la médiane sont éloignées de celle-ci (le mode peut alors indiquer laquelle de ces deux possibilités est la plus probable) ; si la moyenne est très inférieure à la médiane on peut conjecturer que les deux facteurs jouent.

Dans ces cas là, avec seulement 2 nombres (médiane et moyenne), on peut avoir un bon résumé de la série.
Par contre si moyenne et médiane sont proches, la seule chose qu'on peut dire c'est les données inférieures et supérieures à la médiane se compensent pour la moyenne. Soit pas grand chose.
On va voir dans le problème qui suit qu'il nous faut d'autres outils pour faire résumer une série.

4.2.1 Le problème

Soit S_1, S_2 et S_3 les trois séries de notes suivantes :

S_1	2; 2; 4; 4; 6; 10; 14; 16; 16; 18; 18
S_2	2; 8; 9; 10; 10; 10; 11; 12; 18
S_3	2; 5; 5; 5; 5; 6; 6; 7; 9; 10; 11; 13; 14; 14; 15; 15; 15; 15; 18

1. Pour chacune de ces séries, déterminer les valeurs extrêmes, la moyenne et la médiane.
   Que constate-t-on ?
2. Ces trois séries ont-elles la même allure ?
   Inventer des mesures permettant de témoigner des différences entre elles.

4.2.2 Résolution du problème

Les trois séries proposées ont les mêmes valeurs extrêmes, la même moyenne et la même médiane, cependant on peut observer qu'elles n'ont pas la même allure.
Dans S_1, deux blocs de notes extrêmes de part et d'autre des valeurs centrales et se compensent pour la moyenne.
Dans S_2, hormis les valeurs extrêmes, toutes les notes sont regroupées autour des valeurs centrales.
Dans S_3, deux gros blocs sont situés de part et d'autre des valeurs centrales, l'un autour de 5, l'autre autour de 15, et se compensent pour la moyenne et un petit bloc est centré sur 10.
Il s'agît donc d'inventer des mesures témoignant de la dispersion globale des données autour des valeurs centrales. Ce nouvel indicateur devra indiquer un écart important pour S_1, un écart réduit pour S_2 et un écart moyen pour S_3.

Première approche

Une autre façon de mesurer la dispersion d'une série est d'examiner comment sont réparties les plus petites valeurs d'une part, et les plus grandes valeurs d'autre part. Or on connait la valeur qui les sépare : c'est la médiane.
On s'intéresse alors, pour chaque série, aux deux sous-séries que constituent les données inférieures à la médiane et les données supérieures à la médiane.

Moyenne On peut en faire les moyennes qu'on peut appeler moyenne inférieure $\left(\overline{x^-}\right)$ et moyenne supérieure $\left(\overline{x^+}\right)$.

On obtient alors :

S_1	$\overline{x^-} \approx 4,7$; $\overline{x^+} \approx 15,3$
S_2	$\overline{x^-} = 7,8$; $\overline{x^+} = 12,2$
S_3	$\overline{x^-} = 6$; $\overline{x^+} = 14$

Ces indicateurs fournissent une bonne mesure de la dispersion de chacune des séries autour de la médiane.

Médiane On peut en faire les médianes qu'on peut appeler médiane inférieure (m^-) et médiane supérieure $\left(m^+\right)$.

On obtient alors :

S_1	$m^- = 4$; $m^+ = 16$
S_2	$m^- = 9$; $m^+ = 11$
S_3	$m^- = 5$; $m^+ = 5$

Ces indicateurs fournissent là encore une bonne mesure de la dispersion de chacune des séries autour de la médiane.

On notera que au moins 25% des données de la série sont comprises entre la valeur minimale et m^-, 25% entre m^- et m, 25% entre m et m^+ et enfin 25% entre m^+ et la valeur maximale.

Ces trois nombres partagent donc la série en quarts et sont appelés *quartiles*. m^- est le premier quartile, noté Q_1, m est le deuxième quartile, noté m, et m^+ le troisième quartile, noté Q_3.

C'est cette seconde mesure de dispersion qui a été retenue par les statisticiens.

Une seconde approche

Une façon de procéder est de mesurer l'écart de chaque donnée avec les valeurs centrales que sont la médiane et la moyenne en faisant la différence entre chaque donnée et ces valeurs centrales.
Ainsi on obtient :

S_1	-8 ; -8 ; -6 ; -6 ; -4 ; 0 ; $+4$; $+6$; $+6$; $+8$; $+8$
S_2	-8 ; -2 ; -1 ; 0 ; 0 ; 0 ; $+1$; $+2$; $+8$
S_3	-8 ; -5 ; -5 ; -5 ; -5 ; -4 ; -4 ; -3 ; -1 ; 0 ; $+1$; $+3$; $+4$; $+4$; $+5$; $+5$; $+5$; $+5$; $+8$

Le problème est que la somme de ces écarts est nulle (ou proche de 0 dans des cas moins particuliers que ces séries) !

Valeur absolue Une première solution est de prendre la valeur absolue de chacun de ces écarts.

Cet indicateur donne 64 pour S_1, 22 pour S_2 et 80 pour S_3 et témoigne que S_2 est moins dispersée que les autres, par contre il fournit une mauvaise indication pour S_1 et S_3. Cela est dû au fait que si les données de S_1 sont plus dispersées que celles de S_3, il y en a moins, donc cet indicateur est faussé par les effectifs.
Pour contourner ce problème, il suffit de passer à la moyenne de ces valeurs absolues. Ainsi la moyenne des écarts aux valeurs centrales est $\frac{64}{11} \approx 5,8$ pour S_1, $\frac{22}{9} \approx 2,4$ pour S_2 et $\frac{80}{19} \approx 4,2$ pour S_3.
On obtient ainsi une bonne mesure de la dispersion.
On admettra que pour cette mesure de dispersion c'est la médiane qui fournit la valeur la plus centrale.

Carré Une seconde solution est de prendre les carrés de chacun de ces écarts et d'en faire la moyenne pour compenser les différences d'effectifs comme précédemment.
On obtient $\frac{(-8)^2+(-8)^2+(-6)^2+...+8^2}{11} \approx 39,3$ pour S_1, 15,3 pour S_2 et 21,7 pour S_3.
On obtient là encore ainsi une bonne mesure de la dispersion.
On démontre que pour cette mesure de dispersion, c'est la moyenne qui fournit la valeur la plus centrale.
C'est cette seconde mesure de dispersion qui a été choisie par les statisticiens. Elle est nommée *variance* de la série.
Dépendant des carrés des écarts à la moyenne, son unité peut parfois poser problème. Ainsi, si les données sont en mètre, la variance est en mètre carré. Par ailleurs, avec la mesure en valeur absolue, on obtenait des écarts à la médiane parlants (« les écarts à la médiane de S_1 sont en moyenne de 5,8 » est plus parlant que « la variance de S_1 est 39,3 »).
Pour toutes ces raisons, et d'autres encore, c'est la racine carrée de la variance qu'on fournit comme résumé et on appelle cette mesure de dispersion l'*écart-type* de la série.
Ainsi les écarts-types des séries S_1, S_2 et S_3 sont, respectivement, 6,3, 3,9 et 4,7.
Même si cela n'est pas tout à fait exact, on peut penser l'écart-type comme étant l'écart moyen à la moyenne de toutes les données de la série.

4.3 Bilan et compléments

4.3.1 Médiane, quartiles et déciles

Définition 4.7. Soit S une série statistique quantitative.
- On appelle *premier quartile*, noté Q_1, tout réel tel que
  - au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_1
  - au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_1
- On appelle *deuxième quartile* ou *médiane*, noté m (ou parfois Q_2), tout réel tel que
  - au moins 50% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à m
  - au moins 50% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à m
- On appelle *troisième quartile*, noté Q_3, tout réel tel que
  - au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_3
  - au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_3

De la même manière qu'on a défini les quartiles, on peut définir les *déciles* : ce sont les 9 nombres qui partagent la série en dixièmes (comme les trois quartiles partagent la série en quarts).
On s'intéressera à deux d'entre eux :

Définition 4.8. Soit S une série statistique quantitative.
- On appelle *premier décile*, noté D_1, tout réel tel que
  - au moins 10% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à D_1
  - au moins 90% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à D_1
- On appelle *neuvième décile*, noté D_9, tout réel tel que
  - au moins 90% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à D_9
  - au moins 10% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à D_9

Définition 4.9. Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ telles que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. On appelle
- *étendue* de la série la différence $e = x_n - x_1$ (différence entre les termes extrêmes de la série) ;
- *écart interquartile* la différence $Q_3 - Q_1$;
- *intervalle interquartile* l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$.
- *écart interdécile* la différence $D_9 - D_1$;
- *intervalle interdécile* l'intervalle $[D_1 ; D_9]$.

Remarque. Toutes ces mesures statistiques sont dans la même unité que les valeurs de la série.

Comme pour la médiane, selon le nombre n de données dans la série, il y a parfois plusieurs possibilités pour Q_1 et Q_3 et parfois une seule, selon que n est ou n'est pas multiple de 4, ce qui peut compliquer leur recherche.
Heureusement, une formule permet de trouver une valeur convenable dans tous les cas :

Théorème 4.3. *Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ telles que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.*
- *La donnée de rang $E\left(\frac{1}{10}n\right)+1$ convient toujours comme premier décile.*
- *La donnée de rang $E\left(\frac{1}{4}n\right)+1$ convient toujours comme premier quartile.*
- *La donnée de rang $E\left(\frac{3}{4}n\right)+1$ convient toujours comme troisième quartile.*
- *La donnée de rang $E\left(\frac{9}{10}n\right)+1$ convient toujours comme neuvième décile.*

où $E(x)$ est la partie entière de x, c'est-à-dire l'entier n tel que $n \leqslant x < n+1$.

On l'admettra.

Remarques. • $E(2,3) = 2$ et $E(3) = 3$.
- Les réels obtenus avec le théorème sont toujours des éléments de la série.

Exemple 4.1. S'il y a $n = 29$ données dans la série, rangées dans l'ordre croissant :
- $E\left(\frac{1}{10}\times 29\right)+1 = E(2,9)+1 = 2+1 = 3$ donc la troisième donnée de la série convient comme premier décile ;
- $E\left(\frac{1}{4}\times 29\right)+1 = E(7,25)+1 = 7+1 = 8$ donc la huitième donnée de la série convient comme premier quartile ;
- $E\left(\frac{1}{2}\times 29\right)+1 = E(14,5)+1 = 14+1 = 15$ donc la quinzième donnée de la série convient comme médiane ;
- $E\left(\frac{3}{4}\times 29\right)+1 = E(21,75)+1 = 21+1 = 22$ donc la vingt-deuxième donnée de la série convient comme troisième quartile ;
- $E\left(\frac{9}{10}\times 29\right)+1 = E(26,1)+1 = 26+1 = 27$ donc la vingt-septième donnée de la série convient comme neuvième décile quartile.

Propriété 4.4. *Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ avec $n \geq 5$. On ne change les déciles, les quartiles et la médiane si on remplace x_1 par n'importe quel nombre de l'intervalle $]-\infty\,; x_1]$ et x_n par n'importe quel nombre de l'intervalle $[x_n\,; +\infty[$.*

Preuve. Comme on ne change pas le nombre de valeurs de la série, il y en aura toujours autant inférieures et supérieures à D_1, Q_1, m, Q_3 et D_9. ◊

4.3.2 Moyenne, variance et écart-type

Définition 4.10. Soit S une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$.
On appelle :
- *moyenne* de S, notée $\overline{x}$, le nombre $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$.
- *variance* de S, notée V, le nombre $V = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{x}-x_i\right)^2}{n} = \frac{(\overline{x}-x_1)^2+\ldots+(\overline{x}-x_n)^2}{n}$
- *écart-type* de S, noté s, le nombre $s = \sqrt{V}$.

Les formules de la définition sont équivalentes aux suivantes :

Propriété 4.5. *Soit S une série statistique quantitative comportant n données selon p modalités $x_1, x_2, \dots, x_p$ d'effectifs respectifs (ou de fréquences respectives) n_1, n_2, …, n_p, alors :*

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{p} n_i} = \frac{n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_px_p}{n_1+n_2+\ldots+n_p} \qquad V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i\left(\overline{x}-x_i\right)^2}{n_1+n_2+\ldots+n_p}$$

Preuve. **Dans le cas des effectifs** La valeur x_i ayant pour effectif n_i, pour chaque valeur on a : $\underbrace{x_i+x_i+\ldots+x_i}_{n_i} = n_i x_i$ et la somme de toutes les valeurs est bien égale à la somme des $n_i x_i$.
On a aussi $n_1+n_2+\ldots+n_p = n$. On a donc $\frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{p} n_i} = \overline{x}$.

Dans le cas des fréquences Si n_i est l'effectif de x_i alors $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{n} = \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i}{n} x_i = \sum_{i=1}^{p} f_i x_i$ où f_i est la fréquence de x_i.
Par ailleurs la somme des fréquences, $\sum_{i=1}^{p} f_i$ est égale à 1 donc $\overline{x} = \sum_{i=1}^{p} f_i x_i = \frac{\sum_{i=1}^{p} f_i x_i}{1} = \frac{\sum_{i=1}^{p} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{p} f_i}$.
La formule est donc valable avec les fréquences.

On démontre de même que la seconde formule donne bien la variance. ◊

Rappelons ce que nous avons vu dans le problème d'introduction.
La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. Elle mesure donc la dispersion des valeurs autour de la moyenne. Elle n'est pas très parlante car elle s'exprime dans le carré de l'unité du caractère.

L'écart-type a l'avantage de s'exprimer dans la même unité que le caractère.
L'écart-type permet de comparer la dispersion de deux séries, quand l'ordre de grandeur des données des deux séries est le même. Contrairement à l'écart interquartile, il tient compte de l'ensemble de la population.
On dispose d'une formule plus pratique pour calculer la variance :

Théorème 4.6. *Soit S une série statistique quantitative comportant n données selon p modalités $x_1, x_2, \dots, x_p$ d'effectifs respectifs (ou de fréquences respectives) $n_1, n_2, \dots, n_p$, alors :*

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{p} n_i} - \overline{x}^2$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sum_i n_i \left(\overline{x} - x_i\right)^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_i n_i \left(\overline{x}^2 - 2\overline{x} x_i + x_i^2\right) \\ &= \frac{1}{n} \left[n_1 \left(\overline{x}^2 - 2\overline{x} x_1 + x_1^2\right) + \ldots + n_p \left(\overline{x}^2 - 2\overline{x} x_p + x_p^2\right) \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[(n_1 + \ldots + n_p)\overline{x}^2 - 2\overline{x}(n_1 x_1 + \ldots + n_p x_p) \; + n_1 x_1^2 + \ldots + n_p x_p^2 \right] \end{aligned}$$

Or $n_1 + \ldots + n_p = n$ car c'est la somme des effectifs de chaque valeur et $n_1 x_1 + \ldots + n_p x_p = n\overline{x}$ par définition de la moyenne. On a donc :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{n} \left[n\overline{x}^2 - 2\overline{x}(n\overline{x}) + n_1 x_1^2 + \ldots + n_p x_p^2 \right] = \frac{1}{n} \left[n\overline{x}^2 - 2n\overline{x}^2 + n_1 x_1^2 + \ldots + n_p x_p^2 \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[-n\overline{x}^2 + n_1 x_1^2 + \ldots + n_p x_p^2 \right] = -\overline{x}^2 + \frac{1}{n} \left(n_1 x_1^2 + \ldots + n_p x_p^2 \right) \\ &= -\overline{x}^2 + \frac{1}{n} \sum_i n_i x_i^2 \end{aligned}$$

On démontre la formule avec les fréquences de la même manière que dans la démonstration de la propriété 6. ♢

4.3.3 Moyennes mobiles

Dans le cas d'une série chronologique, afin d'atténuer les variations saisonnières, on peut remplacer chaque donnée par la moyenne de cette donnée avec les $n-1$ précédentes données. On obtient alors *un lissage par moyenne mobile d'ordre n*.

Exemple 4.2. On donne les résultats de vente suivants :

Année	1 997				1 998				1 999				2 000			
Trimestre	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Ventes	36	44	45	106	38	46	47	112	42	49	48	118	42	50	51	118

1. Représenter ces données dans un repère. Qu'observe-t-on ?
2. Réaliser des lissages d'ordre 2, 3 et 4 (on pourra compléter le tableau ci-dessous).

Année	1 997				1 998				1 999				2 000			
Trimestre	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Ventes	36	44	45	106	38	46	47	112	42	49	48	118	42	50	51	118
Lissage d'ordre 2																
Lissage d'ordre 3																
Lissage d'ordre 4																

3. Représenter ces lissages dans le repère précédent.
4. Qu'observe-ton ?

4.3.4 Représentations graphiques

Diagramme à bâtons, histogramme

Si les données sont regroupées en classes (intervalles), la série peut-être représentée par un histogramme où chaque rectangle a son *aire* proportionnelle à l'effectif (ou à la fréquence) de la classe.
Ainsi si on considère la série :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_i	3	5	6	5	6	7	7	10	13	20	25	21	23	12	10	5	7	5	3	2	1

Et la même regroupée en classe :

x_i	$[0;5,5]$	$]5,5;8,5]$	$]8,5;11,5]$	$]11,5;14,5]$	$]14,5;20]$
n_i	30	30	66	45	23

On obtient les diagrammes en bâtons (figure 4.1, de la présente page) et histogramme (figure 4.2, page ci-contre).

FIGURE 4.1 – Diagramme en bâtons

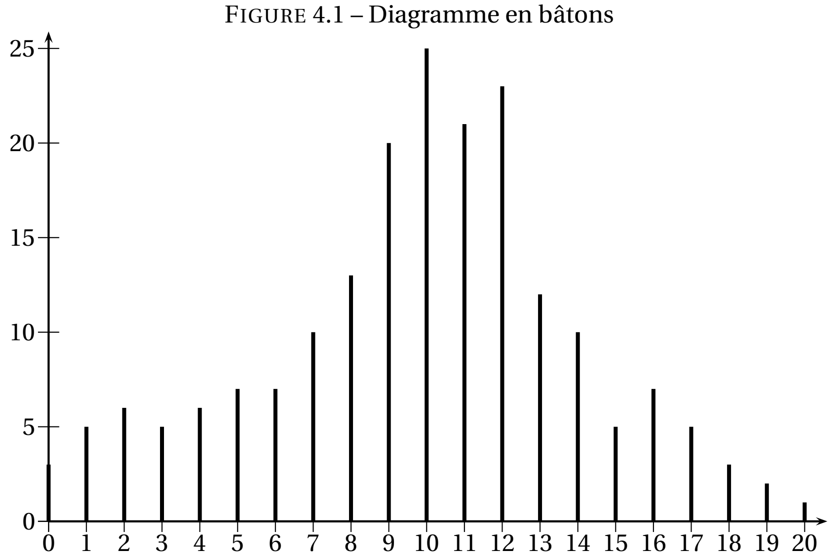
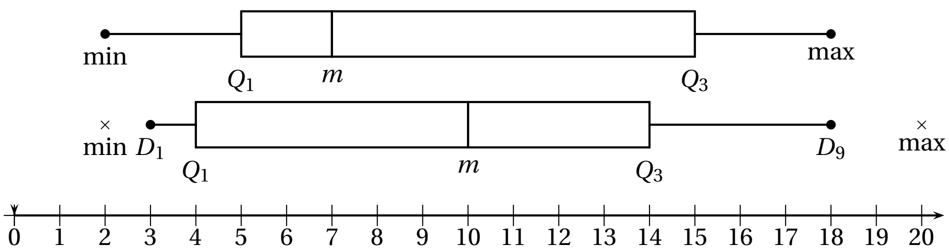


Diagramme en boite

On peut représenter graphiquement les valeurs extrêmes, les quartiles et la médiane par un diagramme en boite, appelé aussi boite à moustaches, conçues de la manière suivante :

- au centre une boite allant du premier au troisième quartile, séparée en deux par la médiane ;
- de chaque côté une moustache allant du minimum au premier quartile pour l'une, et du troisième quartile au maximum pour l'autre.

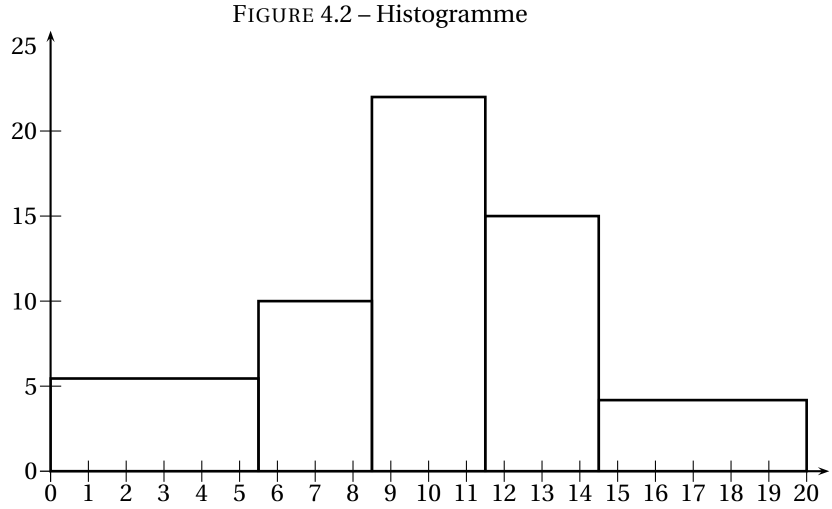


Ces diagrammes permettent une interprétation visuelle et rapide de la dispersion des séries statistiques. Ils permettent également d'apprécier des différences entre des séries (lorsqu'elles ont des ordres de grandeurs comparables).

Remarques. • La hauteur des boites est arbitraire (on les fait parfois proportionnelles à l'effectif total de la série).

- La boite contient les 50% des données centrales.
- On coupe parfois les moustaches de part et d'autre à la hauteur du premier et neuvième décile ; on fait alors apparaître les minimum et maximum par un point (voir la seconde boite du schéma précédent).

FIGURE 4.2 – Histogramme



x_i	[0; 5,5]	]5,5; 8,5]	]8,5; 11,5]	]11,5; 14,5]	]14,5; 20]
n_i	30	30	66	45	23
Aire = n_i	30	30	66	45	23
Largeur = amplitude de la classe	5,5	3	3	3	5,5
Hauteur = $\dfrac{\text{Aire}}{\text{Largeur}}$	5,45	10	22	15	4,18

4.4 Exercices

EXERCICE 4.1.
On a relevé le prix de vente d'un CD et le nombre de CD vendus chez différents fournisseurs. Les résultats forment une série statistique à une variable donnée par le tableau ci-dessous.

Prix de vente (en €)	15	16	17	18	19
Nombre de CD vendus	83	48	32	20	17

1. Quelles sont les différentes valeurs de la série.
2. Donner la fréquence correspondant à chacune de ces valeurs.
3. Donner la moyenne et l'écart-type de la série. Que représentent ces nombres ?
4. Représenter la série par un diagramme à bâtons.

EXERCICE 4.2.
Dans une classe de 30 élèves, la moyenne des 20 filles est 11,5 et la moyenne des 10 garçons est 8,5. Donner la moyenne de classe.

EXERCICE 4.3.
On donne la série suivante : 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 15, 17.

1. Représenter le diagramme en boîte correspondant en coupant les moustaches aux premier et neuvième décile.
2. Quel est l'écart interquartile de la série ?
3. Quel est l'intervalle interdécile de la série ?

EXERCICE 4.4.
Le tableau ci-dessous donne une répartition des salaires mensuels en euros des employés dans une entreprise.

Salaire	[1 000; 1 200[	[1 200; 1 500[	[1 500; 2 000[	[2 000; 3 000[	[3 000; 10 000[
Effectif	326	112	35	8	3

1. Quel est le nombre d'employés de l'entreprise ?
2. Quel est le nombre d'employés touchant un salaire mensuel supérieur ou égal à 1 200 € ?
3. Représenter les données par un histogramme.
4. Quel est le salaire moyen des employés de l'entreprise ?

EXERCICE 4.5.
Un entomologiste a fait des relevés sur la taille de 50 courtilières adultes.
33, 35, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 39, 40, 40, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 43, 44, 44, 44, 44, 45, 45, 45, 46, 46, 47, 47, 48, 48, 50.

1. Organiser les relevés dans le tableau d'effectifs suivant :

Valeur	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Effectif																		
Effectif cumulé croissant																		

2. Représenter les données par un diagramme à bâtons. Un diagramme circulaire serait-il intéressant ?
3. Calculer la moyenne de la série. Déterminer sa médiane. Déterminer les premier et troisième quartiles puis les premier et neuvième déciles.
4. Construire le diagramme en boîte correspondant.
5. On regroupe les données en classes. Compléter le tableau des effectifs suivants :

Valeur	[33 ; 37[	[37 ; 340[	[40 ; 42[	[42 ; 44[	[44 ; 47[	[47 ; 51[
Effectif						

Dessiner l'histogramme correspondant.

EXERCICE 4.6.
Huit sprinters effectuent deux 100 m. Leurs temps sont donnés dans le tableau suivant :

Sprinter	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
Sprint 1	10"14	10" 17	9"94	10" 05	10"25	10" 09	9" 98	10"32
Sprint 2	10"41	9"97	9" 96	10" 12	10" 19	10" 24	10"12	10" 17

Soit (x_i) les temps respectifs des sprinters $A, B, \ldots, H$ au sprint 1 et (yi) les temps respectifs des sprinters $A, B, \ldots, H$ au sprint 2.

1. Calculer les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ des séries (x_i) et (y_i).
2. Calculer les écarts-types s_x et s_y des séries (x_i) et (y_i).
3. Lequel des deux sprints a été le plus homogène ?

EXERCICE 4.7.
Le tableau suivant donne les effectifs des notes obtenues dans une classe en Mathématiques et en Histoire-Géographie :

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maths	0	0	0	0	1	0	1	1	3	4	4	1	3	2	2	1	1	0	0	0	0
H.-G.	0	1	0	0	2	0	1	2	1	1	4	2	2	0	3	2	1	0	1	0	1

Le but de l'exercice est de comparer la dispersion des notes en Maths et en Histoire-Géographie.

1. Utilisation des quartiles
   (a) Calculer médiane m_e et quartiles Q_1 et Q_3 en Maths.
   (b) Calculer médiane m'_e et quartiles Q'_1 et Q'_3 en Histoire-Géographie.
   (c) Représenter les diagrammes en boîte des notes en Maths et en Histoire-Géographie. Interpréter.
2. Utilisation des écarts-types
   (a) Calculer la moyenne $\overline{m}$ des notes en Maths et la moyenne des notes $\overline{m'}$ en Histoire-Géographie. Interpréter.
   (b) Calculer l'écart-type s des notes en Maths et l'écart-type s' des notes en Histoire-Géographie. Interpréter. (*On considérera que les notes en Maths et les notes en Histoire-Géographie sont des grandeurs comparables et qu'il n'y a pas lieu de relativiser les écarts-types*)

EXERCICE 4.8.
Le tableau suivant donne les effectifs des notes obtenues dans une classe en Mathématiques et en Sciences de la vie et de la terre :

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maths	0	1	0	2	0	1	3	0	5	0	2	1	1	0	0	0	2	1	1	0	2
SVT	0	1	0	0	0	0	0	4	4	1	0	3	1	4	2	0	1	0	0	0	1

1. (a) Déterminer les rangs des quartiles et de la médiane des deux séries puis donner leurs valeurs.
   (b) Faire le diagramme en boite des deux séries sur une même échelle puis commenter le diagramme.
2. (a) Déterminer la moyenne des notes de Mathématiques et la comparer à la médiane en expliquant ce qui cause cet écart.
   (b) Déterminer la moyenne des notes de Sciences de la vie et de la terre. L'écart avec la moyenne est-il le même ? Pourquoi ?
   (c) Déterminer les écarts types des deux séries (arrondis au dixième) et commenter vos résultats.

EXERCICE 4.9.
Le tableau suivant donne les temps de cinq sportifs qui ont couru un 1 500 m et un 5 000 m.

	Coureur 1	Coureur 2	Coureur 3	Coureur 4	Coureur 5
1 500 m	3'58"17	4'05"48	4'12"97	4'08"29	4'00"12
5 000 m	14'58"12	14'47"08	15'37"85	13'57"70	14'48"34

On veut déterminer quelle est la course la plus homogène.
Le problème est que les données de chaque série ne sont pas du même ordre de grandeur. En effet un écart moyen de la première série de 30 s sera proportionnellement plus important qu'un écart moyen de 1 min pour la seconde de 1 min. Pour palier à cette difficulté on utilise l'écart-type relatif, noté C_v, appelé coefficient de variation définit par $C_v = \frac{s}{\overline{x}}$ et un écart interquartile relatif, définit par $\frac{Q_3 - Q_1}{m}$.

1. Utilisation des coefficients de variation
   (a) Calculer le temps moyen $\overline{m}$, l'écart-type s puis le coefficient de variation $C_v = \frac{s}{\overline{m}}$ pour le 1 500 m. (*On pourra convertir tous les temps en secondes*).
   (b) Faire de même pour le 5 000 m.
   (c) Conclure.
2. Utilisation de l'interquartile relatif
   (a) Déterminer la médiane m_e et les quartiles Q_1 et Q_3 pour le 1 500 m. En déduire l'interquartile relatif $\frac{Q_3 - Q_1}{m_e}$.
   (b) Faire de même pour le 5 000 m.
   (c) Conclure.
3. Donner une explication à la contradiction entre 1.c) et 2.c).

4.4.1 Travaux dirigés : Lissages par moyennes mobiles

EXERCICE 4.10 (d'après Gilbert Gasse).
Ce exercice doit se traiter à l'aide d'un tableur.

1. Le fichier Lissage1.xls contient un tableau permettant de comparer les variations annuelles de la productivité horaire du travail en pourcentages pour la France et les États-Unis de 1 980 à 1 998.
   (a) En utilisant le type de graphique « courbes », représenter ces deux séries statistiques sur un même graphique.
   (b) Pour opérer un lissage, compléter le tableau avec les variations corrigées pour chaque pays de 1 981 à 1 997 en calculant la moyenne de trois années : celle qui précède, l'année en cours et l'année qui suit.
   Exemple : Pour 81, on fait la moyenne de 2,8 de 4,0 et de 5,5 qui correspondent aux années 80, 81 et 82.
   (c) Faire trois nouveaux graphiques de deux courbes (*les cases grises doivent être sélectionnées*) :
      i. Variations corrigées pour la France et les États-Unis ;
      ii. Variations et variations corrigées pour la France ;
      iii. Variations et variations corrigées pour les États-Unis (*garder les mêmes couleurs pour représenter les mêmes données*).
   (d) i. Comparer les graphiques du 1a et du 1(c)i.
      Comparer les sens de variations de la productivité du travail dans les deux pays.
      ii. Comparer les lissages obtenus grâce aux deux derniers graphiques.
   (e) Pour chaque pays, calculer l'augmentation totale de productivité horaire de 1 980 à 1 998.
2. Le fichier Lissage2.xls contient un tableau qui donne l'évolution de la température de l'air à la surface de la Terre, en degrés Celsius, depuis 1 860. *Source : Alternatives Economiques, hors-série 46.*
   Compléter la troisième colonne, en calculant la moyenne des températures de trois années : celle qui précède, l'année en cours et l'année qui suit (*pour 1 862, on fera la moyenne des températures de 1 860, 1 862 et 1 864*).
   Tracer un graphique avec les données et la courbe de lissage en utilisant un graphique « courbes ».
3. Le fichier Lissage3.xls contient un tableau qui donne l'évolution sur plus de 5 ans de l'indice trimestriel du chiffre d'affaires total d'un secteur.
   (a) Représenter graphiquement ces données (*graphique « courbes »*) en utilisant le tableau de la feuille suivante.
   En abscisses, on placera les 22 trimestres et en ordonnées, les indices.
   (b) Ces indices sont des données brutes. Nous allons remplacer chacun d'eux, à partir du 3e trimestre 1996 et jusqu'au 4e trimestre 2 000 par une moyenne pondérée.
   L'indice brut x_i sera remplacé par : $\dfrac{\frac{x_{i-2}}{2} + x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + \frac{x_{i+2}}{2}}{4}$.
   Ces indices sont des indices corrigés.
   Compléter le tableau de la feuille « tableau » et placer les points correspondants dans le même repère que les précédents (*d'une autre couleur*).
   (c) Ces nouveaux points sont presque alignés et la tendance générale est à l'accroissement.
   Pour permettre des prévisions pour 2 001 et 2 002, l'idée est de définir une droite représentant cette tendance moyenne et de la prolonger pour les trimestres futurs.
      i. Calculer les coordonnées du point A dont l'abscisse est la moyenne des abscisses des neuf premiers points et l'ordonnée la moyenne des ordonnées de ces neuf points.
      Calculer de même les coordonnées du point B pour les neuf derniers points.
      ii. Déterminer une équation de la droite (AB) (*on arrondira les coefficients à 0,01 près*)
      Compléter les cases sous le tableau. Tracer cette droite dans le même repère.
      Cette droite est une droite de tendance. Les ordonnées de ses points sont les indices tendanciels
   (d) Compléter le tableau avec les indices tendanciels tirés de l'équation de la droite (AB) à partir du premier trimestre 1 996 et jusqu'au deuxième trimestre 2 001.
   (e) Ces indices tendanciels ne suivent pas les fluctuations trimestrielles des données.
   Pour permettre des estimations par trimestre, on doit appliquer des coefficients correcteurs.
   On calcule tout d'abord les rapports des indices connus par les indices tendanciels calculés.
   Compléter la colonne correspondante.
   Le coefficient correcteur pour chaque trimestre est alors la moyenne des rapports correspondant à chacun des quatre trimestres.
   Dans la partie rouge, en bas du tableau, compléter la colonne coefficients trimestriels en commençant par le troisième trimestre.
   Remarques : les coefficients sont les mêmes pour chaque troisième trimestre, chaque quatrième etc ; la somme des quatre coefficients correcteurs est 4.
   (f) Compléter le bas de la colonne « indice tendanciel » comme au 3d puis multiplier ces indices par le coefficient correcteur pour obtenir les indices prévus dans la dernière colonne.

Devoir surveillé n°4

Statistiques

EXERCICE 4.1 (20 points)**.**
L'objectif de l'exercice est d'étudier les résultats en mathématiques de deux classes.
Un barème indicatif est donné en bas de la page.

Le tableau suivant donne les résultats obtenus par une classe de Première (arrondis au point supérieur) :

Notes x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs n_i	0	0	0	0	0	1	2	2	0	1	1	2	1	5	4	0	2	1	0	2	0

Le tableau suivant donne les résultats obtenus par une classe de Seconde (regroupés en classes) :

Notes x_i	$[0\,;5[$	$[5\,;8[$	$[8\,;10[$	$[10\,;12[$	$[12\,;15[$	$[15\,;20]$
Effectifs n_i	3	7	4	8	9	6

1. Les résultats de la Première.
   (a) i. Calculer $\overline{x}$ la note moyenne de cette classe, arrondie au dixième.
   ii. Déterminer le rang de m, la note médiane de cette classe, puis la valeur m.
   iii. Comment expliquer la différence entre ces deux résultats ?
   (b) i. Déterminer les rangs de Q_1 et Q_3, les premier et troisième quartiles, puis les valeurs de Q_1 et Q_3.
   ii. Représenter, sur la figure 4.1 page suivante, le diagramme en boite de cette série statistique.
   (c) Déterminer la variance puis l'écart-type de cette série, arrondi au dixième.
   On détaillera un minimum le calcul de la variance (l'utilisation des pointillés pour résumer les calculs est autorisée).
2. Les résultats de la Seconde.
   (a) i. Évaluer $\overline{x'}$ la note moyenne de cette classe, arrondie au dixième.
   ii. À l'aide du diagramme en boite de la figure 4.1, page suivante, donner la valeur m' de la note médiane de cette classe.
   iii. Que peut-on dire de ces deux mesures centrales ?
   (b) Sur le repère de la figure 4.2, construire l'histogramme correspondant aux résultats de la Seconde.
   On pourra s'aider du tableau proposé sous ce repère.
3. Comparaison des résultats des deux classes.
   (a) À l'aide des diagrammes en boite de la figure 4.1 page suivante, commenter et comparer les résultats de ces deux classes.
   (b) L'écart-type des résultats de la classe de Seconde est d'environ 3,9.
   i. Comparer cet écart-type à celui des résultats de la classe de Première.
   ii. Que cela permet-il de dire ?

Barème indicatif

1. Les résultats de la Première.
   (a) i. 1,5 point
   ii. 1,5 point
   iii. 1 point
   (b) i. 3 points
   ii. 2 points
   (c) 3 points
2. Les résultats de la Seconde.
   (a) i. 1,5 point
   ii. 0,5 point
   iii. 0,5 point
   (b) 3 points
3. Comparaisons.
   (a) 1,5 point
   (b) i. 0,5 point
   ii. 0,5 point

FIGURE 4.1 – Diagrammes en boite

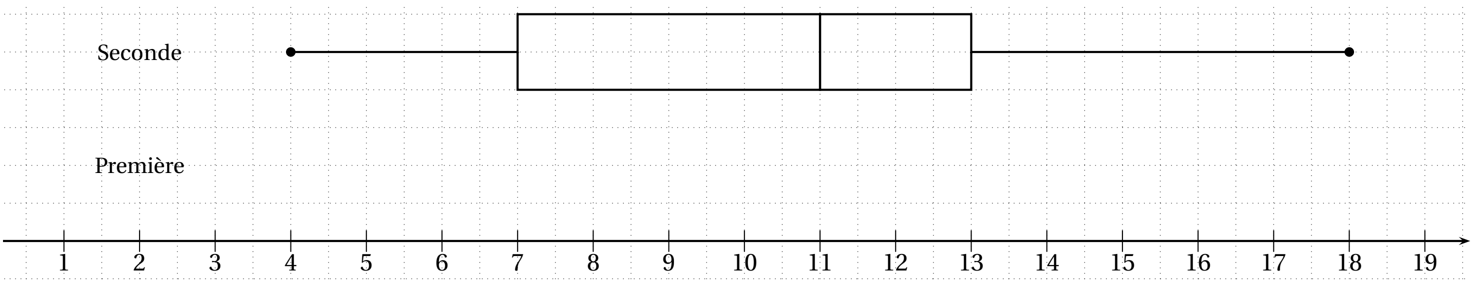
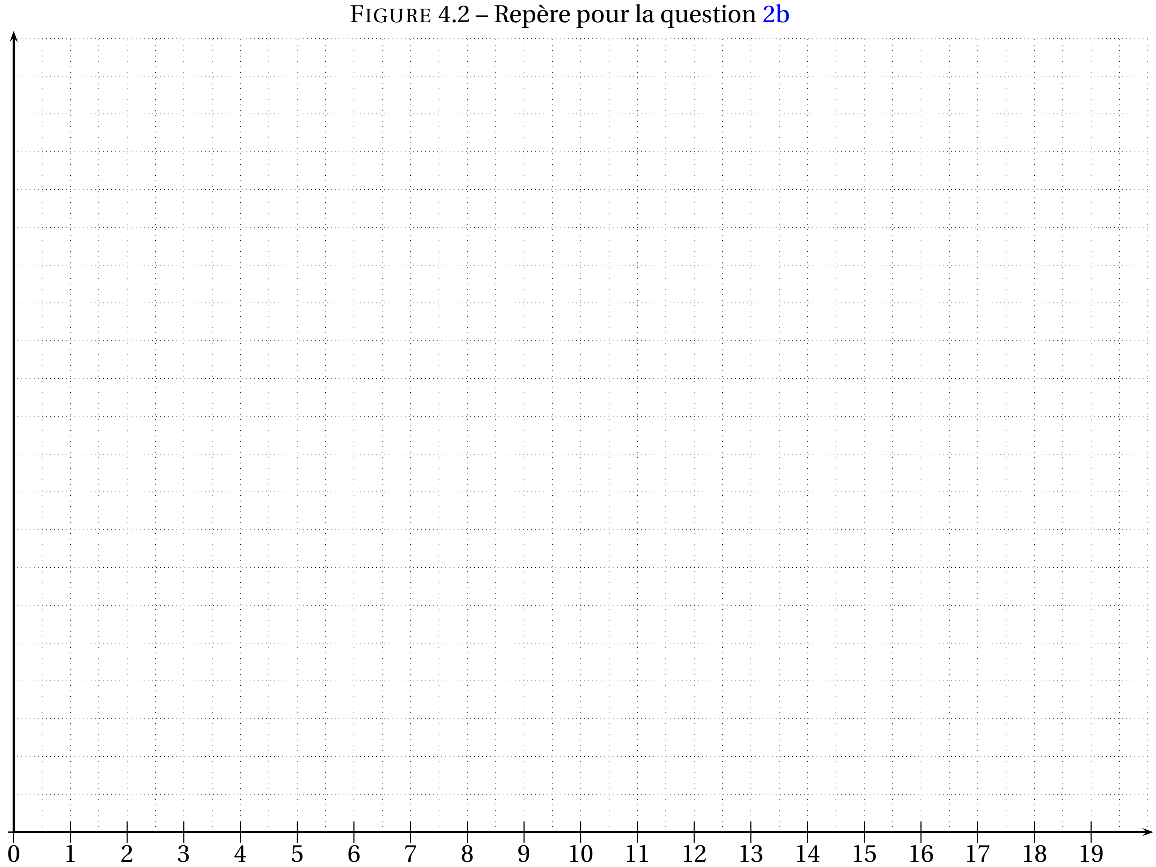


FIGURE 4.2 – Repère pour la question 2b



x_i	[0; 5[	[5; 8[	[8; 10[	[10; 12[	[12; 15[	[15; 20]
n_i	3	7	4	8	9	6

Aire						
Base						
Hauteur						

Chapitre 5

Nombre dérivé

Sommaire

5.1 Activités

ACTIVITÉ 5.1.
Un corps, soumis à certaines forces, parcourt au bout de t secondes la distance $d(t)$ (en mètres) exprimée par :

$$d(t) = 0,1t^3 - 2,4t^2 + 21,2t$$

1. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction d sur l'intervalle $[0;20]$.
2. Calculer la vitesse moyenne du corps dans les intervalles de temps $[0;1]$; $[1;2]$; $[2;3]$; $[3;4]$; $[4;5]$.
   Que constate-t-on ?
   Comment peut-on retrouver graphiquement ces vitesses moyennes ?
3. Inventer une manière d'obtenir la vitesse instantanée à l'instant $t = 2$.

ACTIVITÉ 5.2.
On s'intéresse à la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 25$ et on appelle $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.
On appelle :
- T le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse 1 ;
- T_h le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse $1+h$ où h est un réel ;
- $\mathscr{D}_h$ la sécante (TT_h) ;
- m_h le coefficient directeur de $\mathscr{D}_h$.

1. On suppose que $h = 1$.
   (a) Déterminer l'abscisse x_1 et y_1 et l'ordonnée de T_1.
   (b) Déterminer m_1 le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}_h$.
2. En vous inspirant que la question précédente, compléter le tableau suivant :

h	1	0,5	0,1	0,01	0,001
x_h					
y_h					
m_h					

3. Montrer, par le calcul, que, dans le cas général, $m = -2 - h$ pour $h \neq 0$
4. Quand h *tend* vers 0 :
   (a) Vers quelle valeur *tend* m ?
   (b) Vers quel point *tend* M_h ?

(c) Vers quelle droite *tend* la sécante $\mathscr{D}_h$?

(d) En déduire l'équation réduite de cette droite.

On appellera *tangente* à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse 1, la droite de laquelle se rapproche la sécante $\mathscr{D}_h$ quand h *tend* vers 0 et on appellera *nombre dérivé de* $f(x)$ *en 1* le coefficient directeur de la tangente.

5.2 Nombre dérivé

Définition. On appelle *accroissement moyen* d'une fonction f entre deux nombres *distincts* a et b le nombre :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

On écrit la plupart du temps $a+h$ à la place de b et la définition devient alors :

Définition 5.1. On appelle *accroissement moyen* d'une fonction f entre deux nombres distincts a et $a+h$ le nombre :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Les deux définitions sont équivalentes (il suffit de poser $b=a+h$). C'est la seconde que nous utiliserons pour la suite.
On a vu dans les activités que cet accroissement moyen *tendait* vers l'accroissement « instantané » quand h *tendait* vers 0. Cet accroissement « instantané » est appelé *nombre dérivé* en mathématiques, et on a donc la définition suivante :

Définition 5.2 (Dérivabilité et nombre dérivé)**.** Si, quand h *tend* vers 0, la quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *tend* vers un nombre A, on dit que la fonction f est *dérivable en* a et on appelle A le *nombre dérivé de* f *en* a. On le note $f'(a)$.

Remarques. • On note parfois $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ l'accroissement moyen, surtout en physique.
Δx est la différence[1] entre deux valeurs de x, $\Delta f(x)$ celle entre les deux valeurs correspondantes de $f(x)$.

- On note parfois $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ le nombre dérivé. Le d indique là encore une différence mais entre deux valeurs infiniment proches.
- Ces nombres correspondent à des quantités concrètes qui dépendent de la nature de la fonction f ou de la variable. Ainsi, si $f(t)$ est la distance parcourue au bout d'un temps t, la variation moyenne ne sera rien d'autre que la vitesse moyenne et le nombre dérivé est la vitesse instantanée.

Exemple 5.1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-7$ est-elle dérivable en $a=2$?
Pour le savoir étudions la quantité suivante : $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^3-2^3}{h} = \frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h}\\ &= \frac{12h+6h^2+h^3}{h} = \frac{h(12+6h+h^2)}{h}\\ &= 12+6h+h^2 \text{ avec } h\neq 0\end{aligned}$$

Lorsque h *tend* vers 0 (en restant différent de 0), $12+6h+h^2$ *tend* vers 12. Donc f est dérivable en $a=2$ et son nombre dérivé en 2 est 12. On note alors $f'(2)=12$.

5.3 Interprétation graphique du nombre dérivé

Définition 5.3 (Tangente à une courbe)**.** On appelle *tangente à une courbe* $\mathscr{C}$ *en un point* M, appartenant à $\mathscr{C}$, une droite passant par M et qui, si elle existe, est aux alentours de M, la droite la plus proche de $\mathscr{C}$.

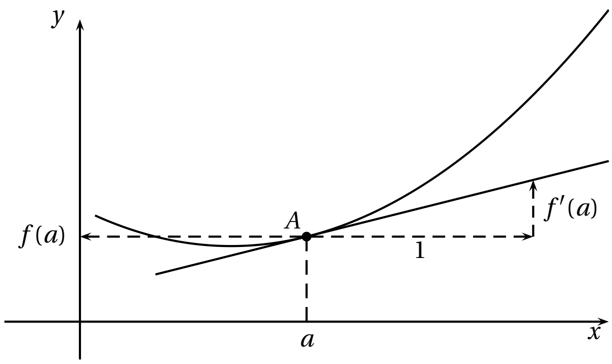
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et $A(a;f(a))$ et $B(a+h;f(a+h))$, deux points de cette courbe.
La quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (AB), sécante à la courbe.
Lorsque h *tend* vers 0, la sécante (AB) *tend* vers la tangente à la courbe au point A et le nombre $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *tend* vers le coefficient directeur de la tangente en A.
On a donc la propriété suivante, qu'on admettra :

1. Δ est la lettre grecque correspondant à D

Propriété 5.1. *Soit f une fonction dérivable en a et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.*
Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.

Le schéma 5.1 de la présente page illustre cette propriété.

FIGURE 5.1 – Interprétation graphique du nombre dérivé



Remarque. Le point $A(a; f(a))$ est un point de la courbe et est *aussi* un point de la tangente ; en particulier, ses coordonnées vérifient l'équation de la tangente. Cela nous permet d'obtenir, dans le cas général, l'équation de la tangente.

Propriété 5.2. *Soit f une fonction définie et dérivable en a et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.*
Alors $\mathscr{C}$ admet en son point d'abscisse a une tangente T_a d'équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Preuve. On sait déjà que $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente T_a, donc son équation est de la forme

$$y = f'(a)x + p$$

Le point $A(a; f(a))$ est un point de la courbe et est *aussi* un point de T_a donc ses coordonnées vérifient l'équation de T_a :

$$f(a) = f'(a) \times a + p \Leftrightarrow p = f(a) - f'(a) \times a$$

Donc

$$\begin{aligned} T_a : y &= f'(a)x + (f(a) - f'(a) \times a) \\ &= f'(a)x - f'(a)a + f(a) \\ &= f'(a)(x-a) + f(a) \end{aligned}$$

♢

5.4 Exercices

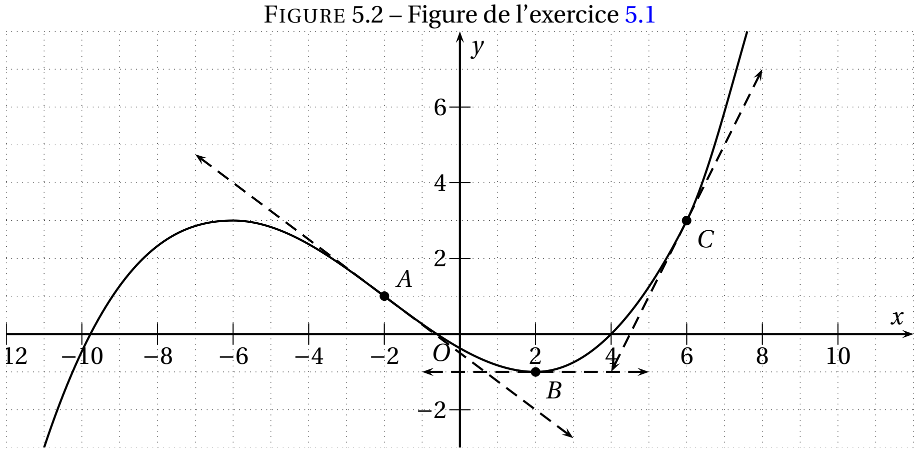
5.4.1 Lectures graphiques de nombres dérivés

EXERCICE 5.1.

On donne sur la figure 5.2 de la présente page la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f en y indiquant les droites tangentes aux points A, B et C.

1. Donner par lecture graphique $f(-2)$ et $f(6)$
2. Donner par lecture graphique $f'(-2)$, $f'(6)$ et $f'(2)$
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2.

FIGURE 5.2 – Figure de l'exercice 5.1

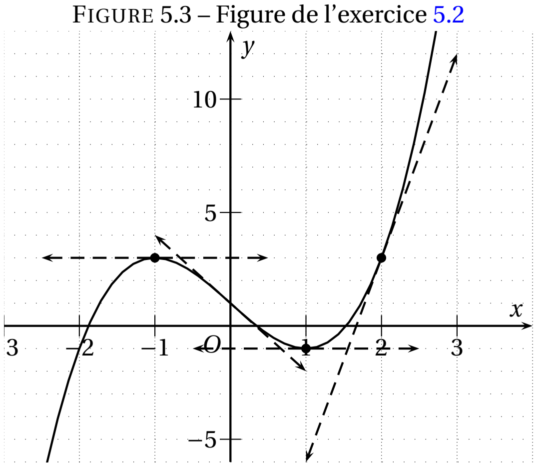


EXERCICE 5.2.

La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 5.3 de la présente page est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthogonal.

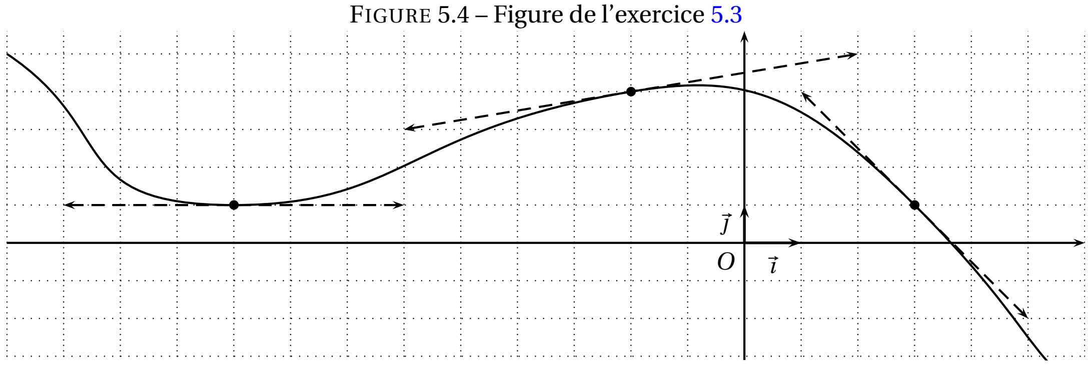
1. Déterminer graphiquement :
   (a) $f(0)$ et $f'(0)$;
   (b) $f(-1)$ et $f'(-1)$;
   (c) $f(2)$ et $f'(2)$;
   (d) L'équation de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1 ;
   (e) L'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.
2. La droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 passe par le point A de coordonnées $(1\,;26)$
   (a) Déterminer par le calcul une équation de T.
   (b) En déduire $f'(-2)$.

FIGURE 5.3 – Figure de l'exercice 5.2



EXERCICE 5.3.
On donne sur la figure 5.4 de la présente page la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction définie f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.

FIGURE 5.4 – Figure de l'exercice 5.3



1. Donner par lecture graphique $f(3)$, $f(-2)$ et $f(-9)$.
2. Donner par lecture graphique $f'(3)$, $f'(-2)$ et $f'(-9)$.
3. Déterminer l'équation réduite de T, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.

5.4.2 Tracés

EXERCICE 5.4.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;3]$ ayant les propriétés suivantes :

- f est décroissante sur $[-3\,;0]$;
- $f(0) = -2$ et $f'(0) = 0$;
- f est paire ;
- $f(3) = 9$.

EXERCICE 5.5.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;9]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 3$ et $f'(1) = 2$;
- $f(3) = 6$ et $f'(3) = 1$;
- $f(5) = 7$ et $f'(5) = 0$;
- $f(6) = 6$ et $f'(6) = -4$.

EXERCICE 5.6.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0) = 1$;
- f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;2]$;
- f admet en 2 un minimum égal à -3 ;
- $f(3) = -1$ et $f(5) = -1$;
- $f'(2) = 0$, $f'(3) = 1$ et $f'(5) = -1$;
- pour tout $x \in [2;5]$, $f(x) < 0$.

5.4.3 Nombres dérivés

EXERCICE 5.7.
Dans chacun des cas suivants, on admettra que la fonction est dérivable et on déterminera par le calcul son nombre dérivé.

1. $f(x) = 3x+7$ en -2.
2. $f(x) = x^2 - 2x$ en 3.
3. $f(x) = x^2 + 2x - 1$ en -1.
4. $f(x) = 2x^2 - x + 1$ en 4.
5. $f(x) = x^3 + 2x - 1$ en 1.
6. $f(x) = \frac{1}{x}$ en 1.
7. $f(x) = \sqrt{x}$ en 2.

EXERCICE 5.8.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
2. Déterminer les nombres dérivés de f là où $\mathscr{C}$ coupe les axes.
3. Déterminer $f'(1)$.
4. Tracer dans un repère les tangentes à la courbe qu'on peut déduire des questions précédentes.
5. Tracer $\mathscr{C}$ dans ce même repère.

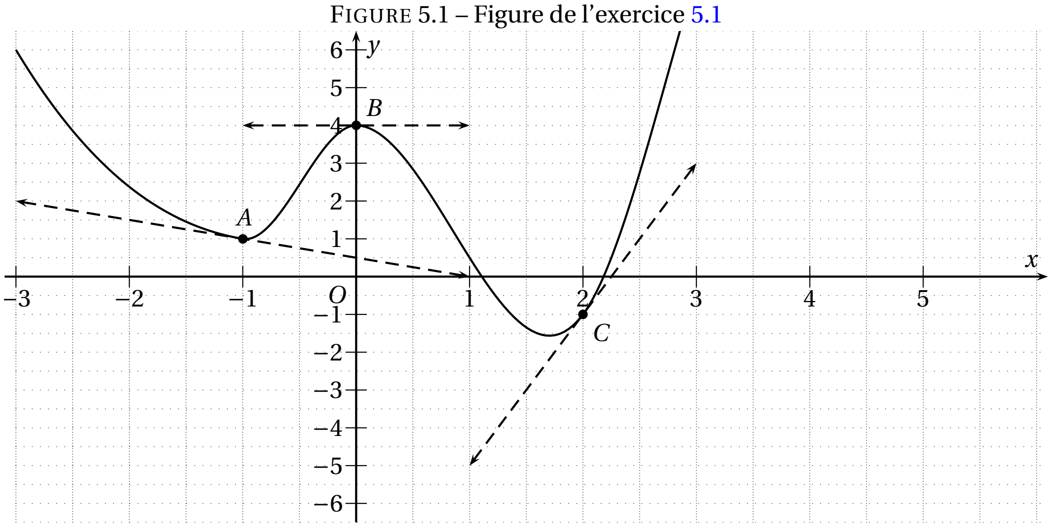
Devoir surveillé n°5

Nombre dérivé

EXERCICE 5.1 (5,5 points)**.**
On donne sur la figure 5.1 de la présente page la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f en y indiquant les droites tangentes aux points A, B et C.

1. Donner par lecture graphique, sans justifier, $f(-1)$, $f(0)$ et $f(2)$.
2. Donner par lecture graphique :
   - En justifiant : $f'(-1)$;
   - Sans justifier : $f'(0)$ et $f'(2)$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.

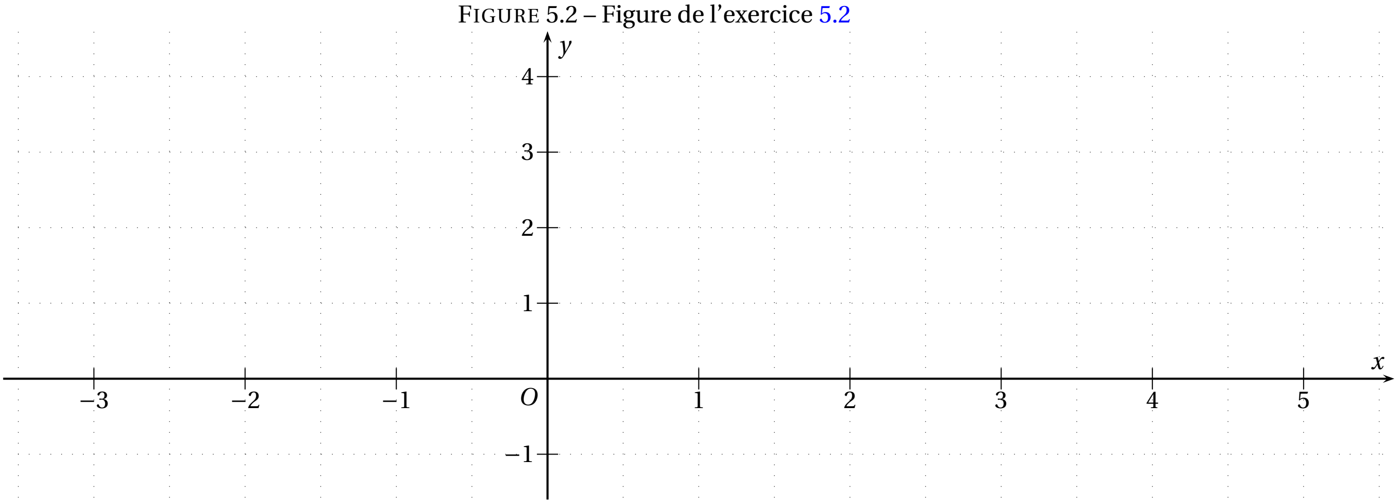
FIGURE 5.1 – Figure de l'exercice 5.1



EXERCICE 5.2 (5,5 points)**.**
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ dans le repère fourni sur la figure 5.2 de la présente page représentant une fonction f ayant les propriétés suivantes (*on tracera **toutes** les tangentes qu'on peut déduire de l'énoncé*) :

- $f(x)$ est défini pour $x \in [-3; 5]$;
- Le maximum de f est 3, atteint en -1 ;
- $f(-2) = 1$ et $f(3) = 2$;
- $\mathscr{C}$ intercepte l'axe des abscisses en 2 et l'axe des ordonnées en 1 ;
- $f'(-2) = 3$, $f'(-1) = 0$, $f'(0) = -1$, $f'(2) = 0$ et $f'(3) = \frac{1}{2}$.

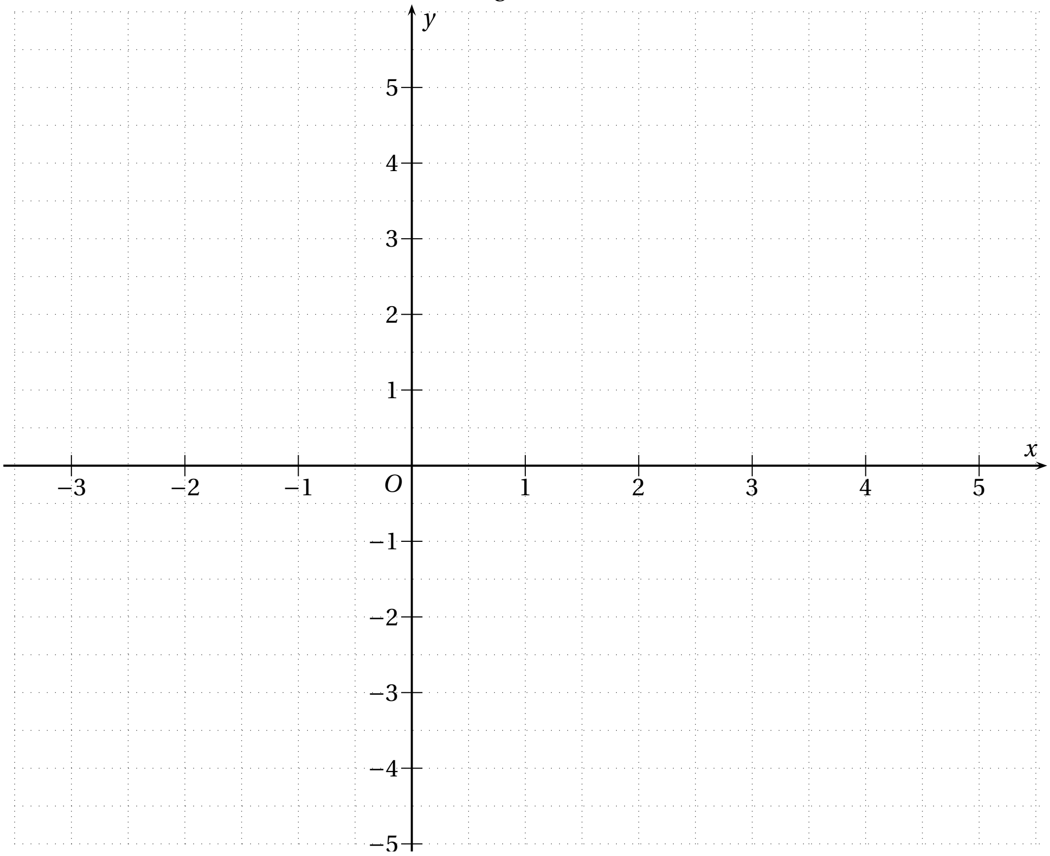
FIGURE 5.2 – Figure de l'exercice 5.2



EXERCICE 5.3 (9 points)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 2$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer, par le calcul, les coordonnées de A, point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.
   (b) Déterminer, par le calcul, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en A.
2. Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
3. Déterminer, par le calcul, $f(3)$ et $f'(3)$ et une équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.
4. (a) Placer en rouge tous les points qu'on peut déduire des questions précédentes dans le repère de la figure 5.3 de la présente page.
   (b) Tracer en vert toutes les tangentes qu'on peut déduire des questions précédentes dans le même repère.
   (c) Tracer $\mathscr{C}$ dans le même repère.

FIGURE 5.3 – Figure de l'exercice 5.3



Barème (provisoire)

EXERCICE 5.1.
5,5 points :

1. 0,75 point
2. • 1,5 point
   • 2 points
3. 1,25 point

EXERCICE 5.2.
5,5 points

EXERCICE 5.3.
9 points :

1. (a) 0,5 point
   (b) 1,5 point
2. 1 point
3. 3 points
4. (a) 1 point
   (b) 1 point
   (c) 1 point

Chapitre 6

Suites : généralités

Sommaire

6.1 Activité

ACTIVITÉ 6.1.
On connaît les premiers termes de quelques suites.

Suite (a_n)	Suite (b_n)	Suite (c_n)	Suite (d_n)	Suite (e_n)
$a_0 = 0$		$c_0 = 1$		$e_0 = 100$
$a_1 = 1$	$b_1 = -1$	$c_1 = 1,5 = \dfrac{3}{2}$	$d_1 = 1$	$e_1 = 20$
$a_2 = 4$	$b_2 = \dfrac{1}{2}$	$c_2 = 1,75 = \dfrac{7}{4}$	$d_2 = 3$	$e_2 = 4$
$a_3 = 9$	$b_3 = -\dfrac{1}{3}$	$c_3 = 1,875 = \dfrac{15}{8}$	$d_3 = 5$	$e_3 = 0,8$
$a_4 = 16$	$b_4 = \dfrac{1}{4}$	$c_4 = 1,9375 = \dfrac{31}{16}$	$d_4 = 7$	$e_4 = 0,16$
$a_5 = 25$	$b_5 = -\dfrac{1}{5}$	$c_5 = 1,96875 = \dfrac{63}{32}$	$d_5 = 9$	$e_5 = 0,032$

1. Conjecturer, dans chaque cas, lorsque c'est possible, une formule permettant de calculer un terme quelconque de la suite en fonction de n (on parle alors de *formule explicite*) ainsi qu'une formule permettant d'obtenir un terme quelconque de la suite en fonction du terme précédant (on parle alors de *relation de récurrence*).
2. À l'aide des relations de récurrence obtenues, calculer, pour chacune des cinq suites ci-dessus, le terme d'indice 10. Faire de même à l'aide des formules explicites. Quelle est la forme la plus pratique ?
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} > a_n$. On dit alors que la suite (a_n) est *strictement croissante*.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} - c_n > 0$. Que peut-on en déduire pour la suite (c_n) ?
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n > 0$. Montrer que $\frac{e_{n+1}}{e_n} < 1$. Que peut-on en déduire pour la suite (e_n) ?
   (d) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = f(n)$ où f est une fonction connue. Expliciter f. Déterminer le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_{n+1} > d_n$. Que peut-on en déduire pour la suite (d_n) ?
   (e) Montrer que la suite (b_n) n'est ni croissante, ni décroissante. On dira que la suite n'est pas *monotone*.

6.2 Définition, vocabulaire et notations

Définition 6.1. Une suite numérique u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction qui à tout entier naturel n associe un reel, noté $u(n)$ ou, plus généralement, u_n.

Définition 6.2 (explicite)**.** Soit f une fonction définie au moins sur $\mathbb{R}^+$. Une suite (u_n), telle que $u_n = f(n)$ est dite définie de manière *explicite*.

Définition 6.3 (par récurrence)**.** Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$.
Une suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ est dite définie *par récurrence*.

Remarques (Vocabulaire, notations). • n est l'indice (ou le rang) et u_n est le terme de rang n.

- *Attention :* (u_n) désigne la suite alors que u_n désigne le terme de rang n.
- Contrairement aux suites explicites, on ne peut pas, *a priori*, calculer un terme quelconque de la suite définie par récurrence, sans avoir obtenu, avant, tous les termes le précédant. De nombreux exercices seront consacrés à obtenir, malgré tout, des moyens de calculer directement un terme donné, c'est-à-dire à transformer, lorsque c'est possible, la suite récurrente en une suite explicite.
- Toutes les fonctions f ne conviennent pas pour définir une suite par récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$). Par exemple si $u_0 = 3$ et $f(x) = \sqrt{x-2}$, c'est-à-dire $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 2}$, on a $u_1 = \sqrt{u_0 - 2} = \sqrt{1} = 1$. Par contre on ne peut pas calculer u_2, donc la suite n'est pas définie.
- Une suite peut aussi être définie par la donnée de u_0 et u_1 et une relation de récurrence du type $u_{n+2} = f(u_{n+1}\,;\,u_n)$.

EXERCICE 6.1.
Dans chacun des cas suivants, déterminer les termes jusqu'au rang $n = 5$.

1. (u_n) telle que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{n+1} + 2$
2. (v_n) telle que $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{2}{v_n} + 1$
3. (w_n) telle que $w_0 = 1$, $w_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$

6.3 Représentation graphique d'une suite

6.3.1 Cas général

Définition 6.4. Dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ la représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n\,;\,u_n)$.

Remarque. Contrairement à une fonction, la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points car la suite n'est définie que pour $n \in \mathbb{N}$. $u_{1,5}$ n'a, mathématiquement, pas de sens et donc le point $(1{,}5; u_{1,5})$ non plus.

EXERCICE.
Construire les représentations graphiques des suites définies à l'exercice 6.1.

6.3.2 Cas d'une suite définie par récurrence

Dans le cas d'une suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$, une autre représentation graphique possible s'obtient en procédant de la façon suivante :

1. On trace la représentation graphique $\mathscr{C}$ de f et la première bissectrice d'équation $y = x$.
2. On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses.
3. On utilise $\mathscr{C}$ pour construire $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.
4. On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la première bissectrice.
5. On utilise $\mathscr{C}$ pour construire $u_2 = f(u_1)$ sur l'axe des ordonnées.
6. etc.

On obtient alors la *répresentation en chemin* de la suite.

EXERCICE.
Construire la représentation en chemin de (v_n) définie à l'exercice 6.1.

6.4 Monotonie d'une suite

6.4.1 Définition

Définition 6.5. Une suite est dite :
- *croissante* si, pour tout n, $u_{n+1} \geqslant u_n$;
- *décroissante* si, pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$;
- *stationnaire* si, pour tout n, $u_{n+1} = u_n$.

Si la suite ne change pas de sens de variation, on dit qu'elle est *monotone*.

Remarque. On obtient les définitions de *strictement* croissante, décroissante ou monotone en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

6.4.2 Méthodes

Signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. Cette méthode est très générale et « fonctionne » souvent.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n^2 - n$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - n^2 + n = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n = 2n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$.
La suite (u_n) est croissante.

Comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

Pour étudier le sens de variation d'une suite *à termes strictement positifs*, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
Cette méthode est particulièrement adaptée aux suites dont le terme général contient une puissance ou un produit.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \frac{2^n}{n}$. La suite (u_n) est à termes strictement positifs car $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{2^n \times 2}{2^n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{2n}{n+1}.$$

Or, $\frac{2n}{n+1} \geq 1 \Leftrightarrow 2n \geq n+1 \Leftrightarrow n \geq 1$, donc, pour tout $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ donc $u_{n+1} \geq u_n$ car $u_n > 0$.
La suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.

Variations de la fonction associée

Pour étudier les variations d'une suite définie par une formule explicite, on peut étudier les variations de la fonction associée. On s'appuie alors sur le théorème suivant.

Théorème 6.1. *Soit (u_n) la suite définie par la relation $u_n = f(n)$.*
Si la fonction f est monotone sur $[0\,; +\infty[$, alors la suite (u_n) est monotone et a même sens de variation que f.

Preuve. Voyons le cas où f est croissante sur $[0\,; +\infty[$, les autres cas se démontrant de manière analogue.
Supposons f croissante sur $[0\,; +\infty[$. Pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant n < n+1$ donc $f(n) < f(n+1)$ donc $u_n < u_{n+1}$.
La suite (u_n) est donc croissante. ♢

Cette méthode concerne donc uniquement les suites définies par une formule explicite, elle est intéressante lorsque les variations de la fonction associée sont simples à déterminer.

Exemple 6.1. Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ par $u_n = \sqrt{n-2}$. On a $u_n = f(n)$ où $f : x \mapsto \sqrt{x-2}$, définie sur $[2; +\infty[$.
La fonction f est une fonction associée à la fonction racine et, comme la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}^+$, d'après les propriétés des fonctions associées, f est croissante sur $[2; +\infty[$.
D'après le théorème précédent, la suite (u_n) est strictement croissante.

Remarque. La réciproque du théorème est fausse.

Exercice.
Étudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n) définies dans l'exercice 6.1.

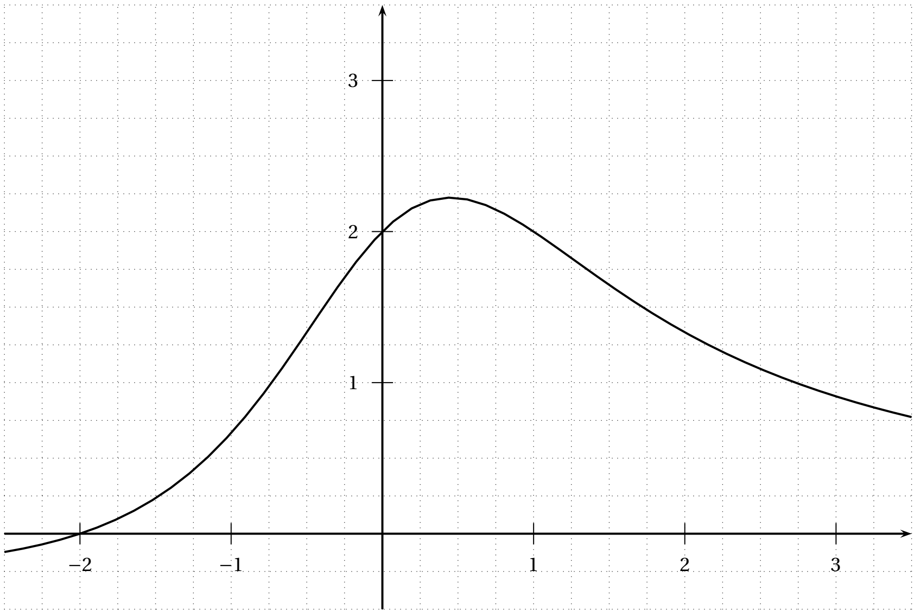
6.5 Exercices

6.5.1 Représentations en chemin

EXERCICE 6.2.

On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{2x+4}{2+x^2}$.

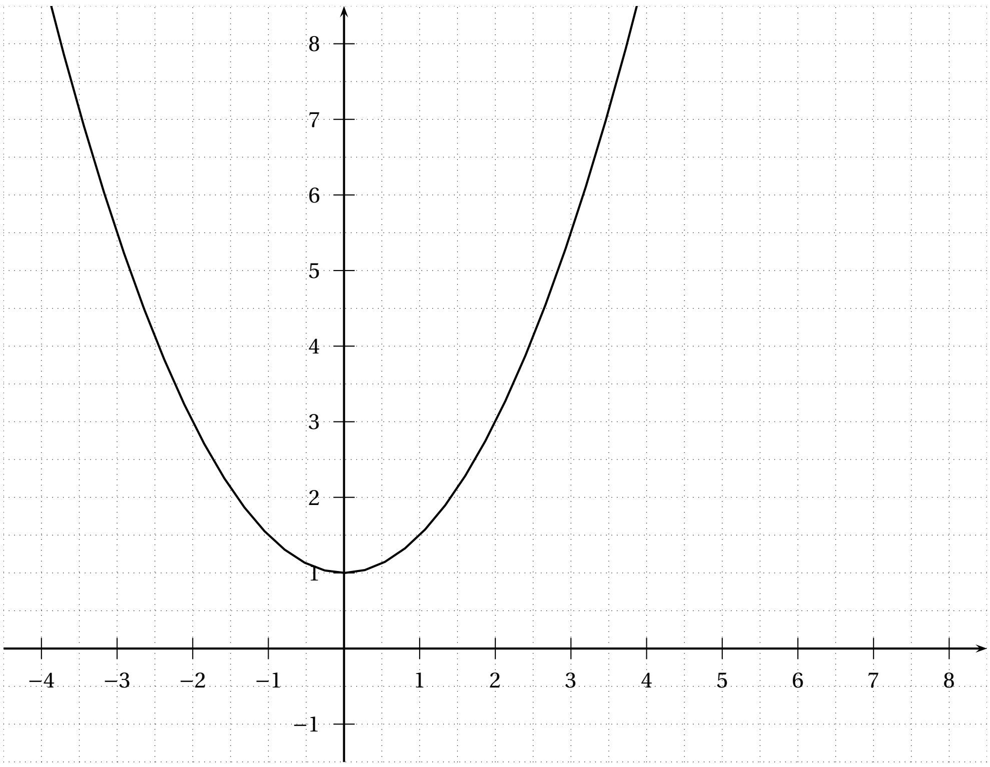
Construire la représentation graphique en chemin de la suite (u_n) définie par $(u_n) : \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+4}{2+u_n^2} \end{cases}$



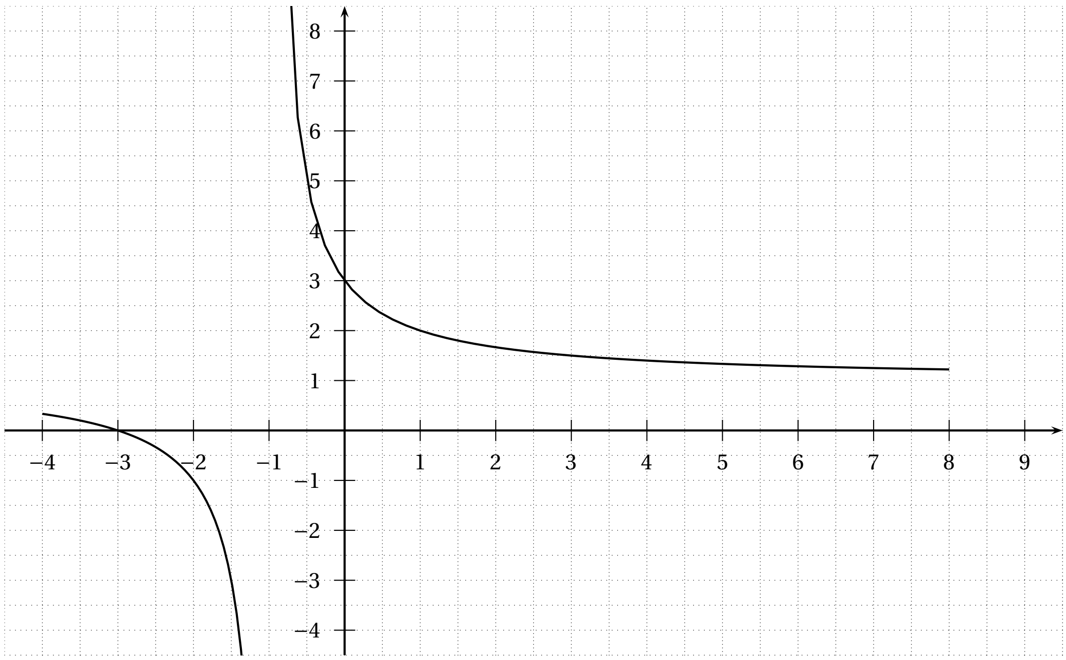
EXERCICE 6.3.

On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

Construire la représentation graphique en chemin de la suite (u_n) définie par $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + 1 \end{cases}$

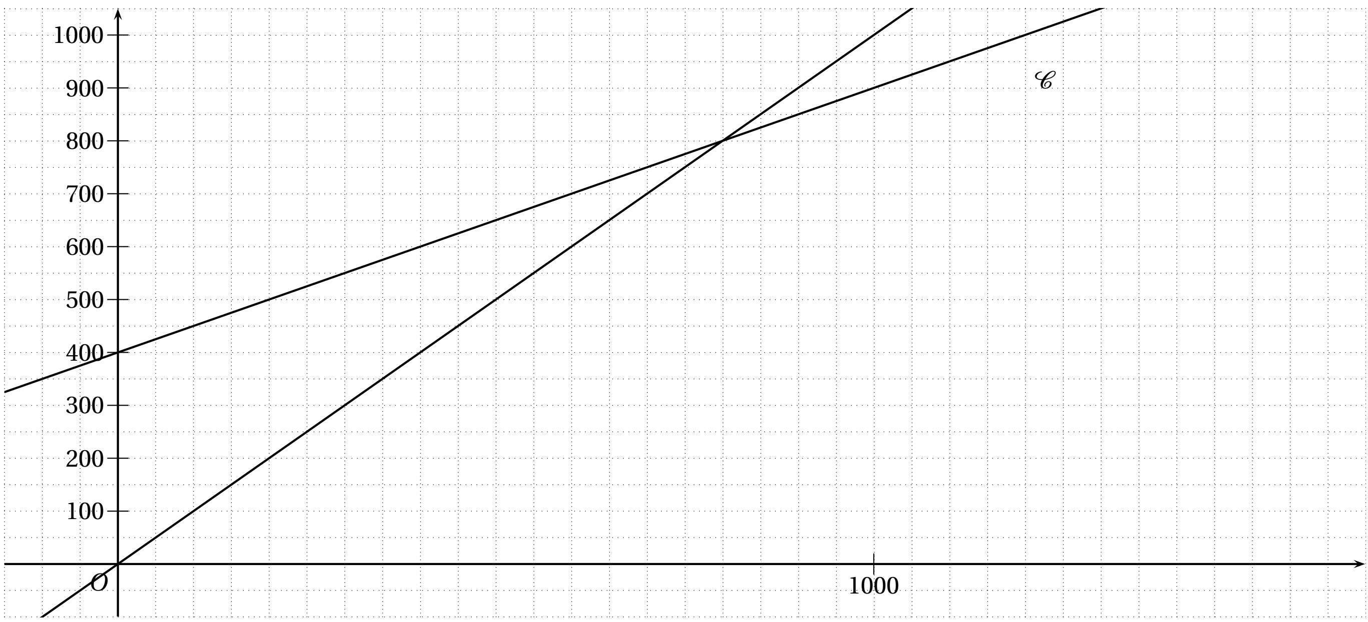


EXERCICE 6.4.
On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$.
Construire la représentation graphique en chemin de la suite (u_n) définie par $(u_n) : \begin{cases} u_0 = -1,5 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+3}{u_n+1} \end{cases}$



EXERCICE 6.5.
Un fournisseur fait une étude sur la fidélité de sa clientèle depuis l'année $n = 0$, où il y a eu 200 clients. Chaque année, sa clientèle est composée de 50% des clients de l'année précédente auxquels s'ajoutent 400 nouveaux clients.

1. Soit u_n le nombre de clients l'année n. Justifier que $u_{n+1} = 0,5u_n + 400$, puis calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. La fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = 0,5x+400$ est représentée par la courbe $\mathscr{C}$ de la présente page, ainsi que la première bissectrice d'équation $y = x$.
   Construire la représentation en chemin de la suite (u_n).
3. (a) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection des deux droites
   (b) Que laisse supposer cette représentation sur le comportement de la suite (u_n) quand n devient grand ?



EXERCICE 6.6.
On donne la suite : (v_n) : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{1+v_n}\right) \end{cases}$

1. Construire sa représentation graphique en chemin dans le repère de la figure 6.1 page ci-contre.
2. Conjecturer sa monotonie.

EXERCICE 6.7.
On donne la suite : (w_n) : $\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = \frac{2w_n+3}{w_n+4} \end{cases}$

1. (a) Construire sa représentation graphique en chemin dans le repère de la figure 6.2 page suivante.
   (b) Comment semble se comporter la suite quand n devient grand ?

6.5.2 Monotonie

EXERCICE 6.8.
Étudier la monotonie de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$;
2. $v_n = n + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$;
3. $w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 6.9.
Étudier la monotonie de chacune des suites suivantes, où $n \in \mathbb{N}$:

1. $u_n = \frac{1}{n+2}$;
2. $v_n = \frac{2n+1}{n+3}$;
3. $u_n = n - n^2$;
4. $w_n = 3^n$.

EXERCICE 6.10.
(v_n) est la suite définie pour tout entier strictement positif par $v_n = \frac{2^n}{n^2}$

1. Calculer ses quatre premiers termes.
2. On cherche à montrer que la suite est croissante à partir du rang $n = 3$.
   (a) Résoudre l'inéquation $\frac{2x^2}{(x+1)^2} > 1$.
   (b) Montrer que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n^2}{(n+1)^2}$.
   (c) Conclure.

FIGURE 6.1 – Figure de l'exercice 6.6

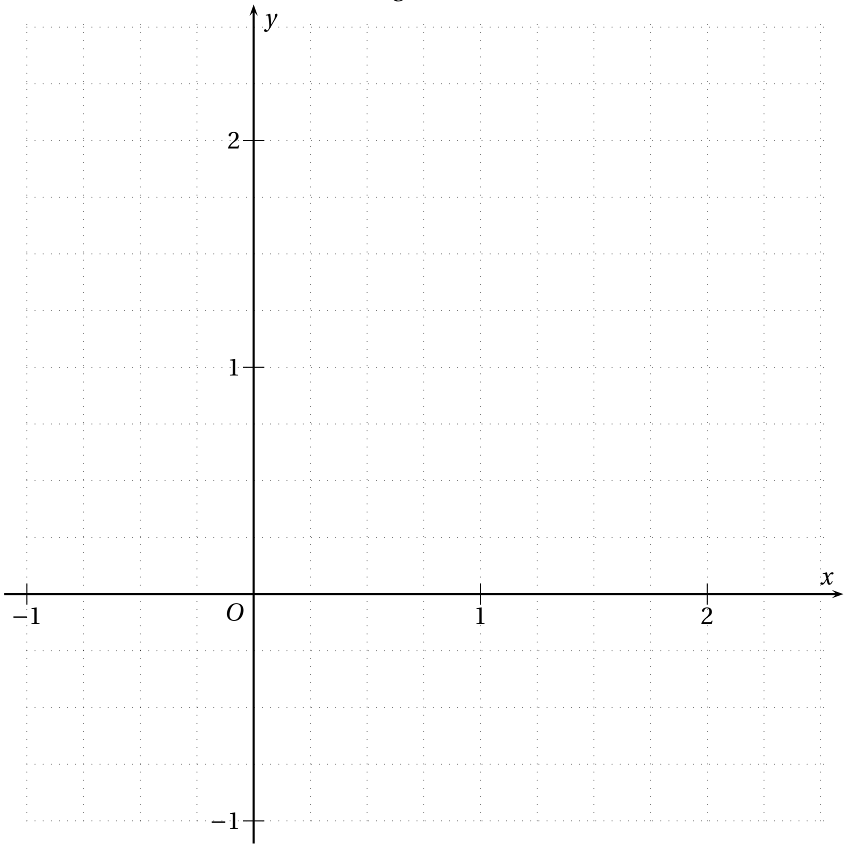
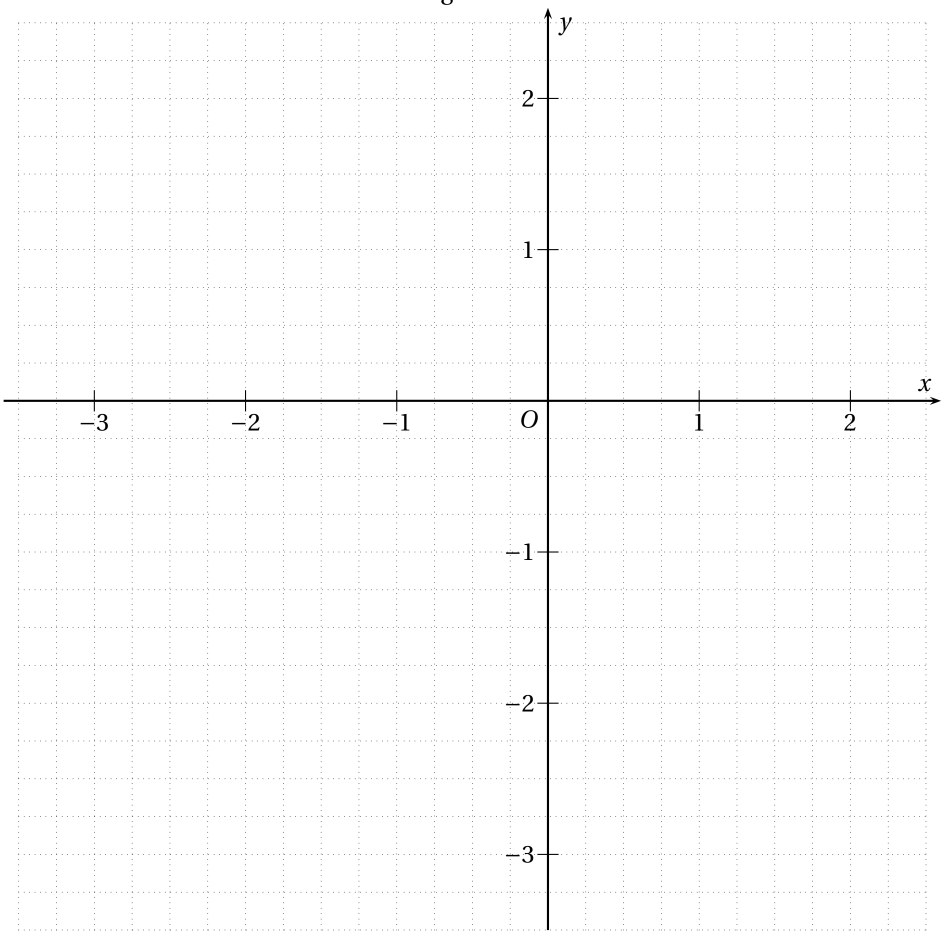


FIGURE 6.2 – Figure de l'exercice 6.7



Devoir surveillé n°6

Généralités sur les suites – Dérivation

EXERCICE 6.1 (5 points)**.**
Compléter par l'expression de la fonction dérivée pour chacune des fonctions suivantes :

- Pour tout x réel et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = x^n$, alors $f'(x) =$ ....
- Pour x réel strictement positif, $f(x) = \sqrt{x}$, alors $f'(x) =$ ....
- Soient u et v deux fonctions dérivables et $f = u + v$, alors $f' =$ ....
- Soient u et v deux fonctions dérivables et $f = u \times v$, alors $f' =$ ....
- Soit v une fonction dérivable telle que $v \neq 0$ et $f = \frac{1}{v}$, alors $f' =$ ....

EXERCICE 6.2 (9 points)**.**
On donne trois suites, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $(u_n) : \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^3 + u_n^2 - 2u_n + 8}{4} \end{cases}$
- $(v_n) : \begin{cases} v_0 = -3 \\ v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n + 1} \end{cases}$
- $(w_n) : \begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = -w_n^2 + 4w_n + 1 \end{cases}$

On donne par ailleurs sur les figures page suivante les courbes représentatives de trois fonctions :

- $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x + 8}{4}$
- $g(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$
- $h(x) = -x^2 + 4x + 1$

1. En justifiant brièvement indiquer quelles sont les courbes respectives de f, g et h.
2. Construire sur la figure adaptée la représentation en chemin de chacune des suites.
3. Pour chacune des trois suites, conjecturer :
   (a) sa monotonie ;
   (b) le comportement de la suite lorsque n devient grand.

EXERCICE 6.3 (6 points)**.**
Étudier la monotonie de chacune des suites suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $u_n = 2 + \frac{1}{n+1}$;
2. $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$;
3. $w_n = n + (-2)^n$.

FIGURE 6.1 – Courbe 1 de l'exercice 6.2

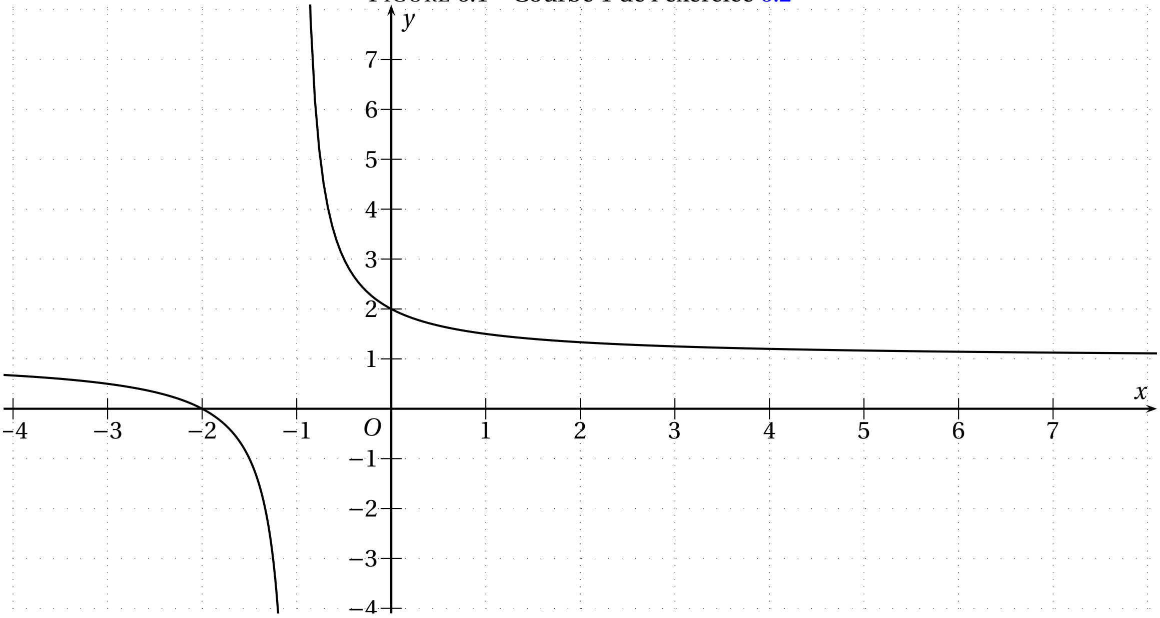


FIGURE 6.2 – Courbe 2 de l'exercice 6.2

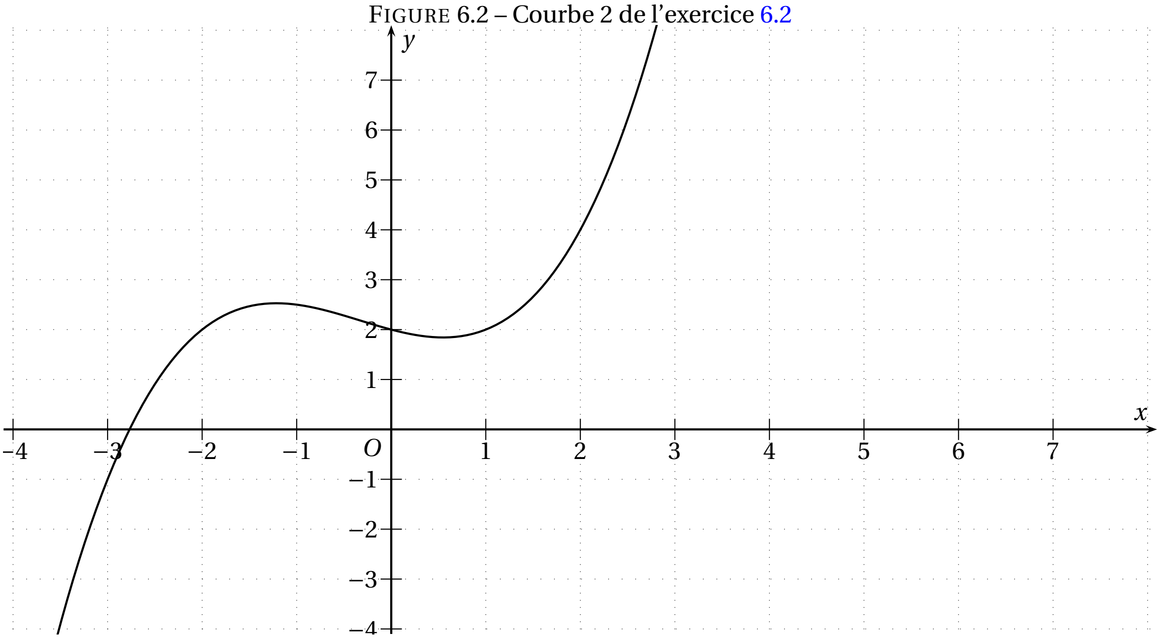
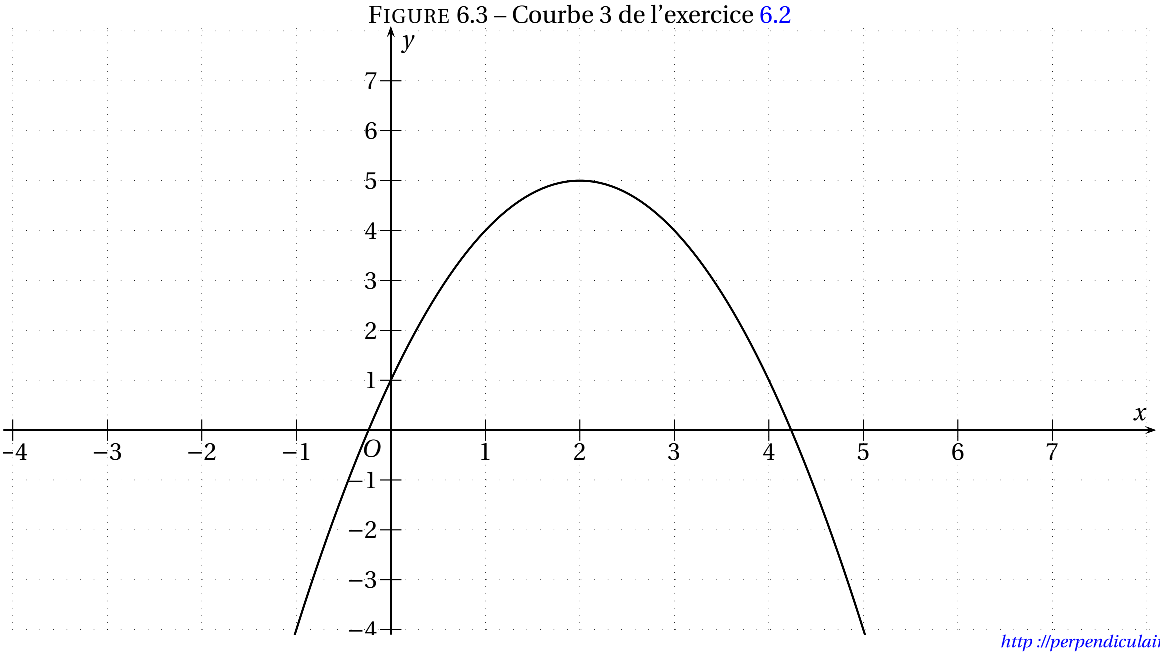


FIGURE 6.3 – Courbe 3 de l'exercice 6.2



Chapitre 7

Dérivation

Sommaire

7.1 Fonction dérivée

7.1.1 Activités

ACTIVITÉ 7.1 (Plusieurs nombres dérivés).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$.

1. Déterminer les valeurs des nombres dérivés en a dans les cas suivants :
   - $a = 0$;
   - $a = 1$;
   - $a = 2$.
2. Cas général : déterminer, en fonction de a, la valeur du nombre dérivé.

On obtient ainsi une fonction, qui dépend de f, qui à tout réel x associe le nombre dérivé de f en x. Une telle fonction est appelée *fonction dérivée de* f et est notée f'. Ainsi, pour $f(x) = -x^2 + 4$, $f'(x) = -2x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

ACTIVITÉ 7.2 (Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles).
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions usuelles suivantes :

- $f(x) = k$;
- $f(x) = mx + p$;
- $f(x) = x^2$;
- $f(x) = x^3$.

7.1.2 Bilan et compléments

Définition 7.1. On dit qu'une fonction f est dérivable sur un ensemble I lorsqu'elle est dérivable en tout nombre de cet ensemble et on note f' la fonction qui a tout nombre x de cet ensemble associe le nombre dérivé de f en x. Cette fonction s'appelle la *fonction dérivée de* f.

On admettra[1] que les fonctions usuelles ont les fonctions dérivées suivantes :

Propriété 7.1. *Les fonctions dérivées des fonctions usuelles sont données par le tableau suivant :*

Fonction f	*définie sur*	*Fonction dérivée* f'	*définie sur*
$f(x) = k$ *(constante)*	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+ =]0; +\infty[$

Remarque. Si l'on remarque que $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ et que $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$, on a alors :
$f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$ a pour fonction dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.
Ainsi, pour obtenir la fonction dérivée de $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, on peut appliquer l'une ou l'autre formule :

$$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -\frac{2}{x^{2+1}} = -\frac{2}{x^3} \text{ ou } f'(x) = nx^{n-1} = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

7.2 Opérations sur les fonctions

7.2.1 Activités

ACTIVITÉ 7.3 (Produit d'une fonction par une constante).
On pose $f(x) = x^2$, $g(x) = 3f(x) = 3x^3$ et $h(x) = \frac{f(x)}{4} = \frac{x^2}{4}$, toutes trois définies sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer la fonction dérivée de chacune de ces fonctions.
2. Que constate-t-on ?

ACTIVITÉ 7.4 (Fonction dérivée d'une somme de fonctions et d'un produit de fonctions).
Soient u, v et f trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3$, $v(x) = -2x^2$ et $f(x) = u(x) + v(x)$.

1. (a) Déterminer $f'(x)$, $u'(x)$ et $v'(x)$.
   (b) Que constate-t-on ?
2. (a) Montrer que $f(x) = g(x) \times h(x)$ où g et h sont deux fonctions non constantes à déterminer.
   (b) Déterminer $g'(x)$ et $h'(x)$.
   (c) A-t-on $f'(x) = g'(x) \times h'(x)$?

1. Certaines démonstrations ont été faites en activité ou seront faites en exercice

7.2.2 Bilan et compléments

Plus généralement, on a :

Propriété 7.2. *Soient u et v définies et dérivables sur un même intervalle I.*

Fonction	*Fonction dérivée*	*Exemple*
ku avec $k \in \mathbb{R}$	ku'	Si $f(x) = 4x^3$ alors $f'(x) = 4 \times \left(3x^2\right) = 12x^2$
$u + v$	$u' + v'$	Si $f(x) = x + \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
$u \times v$	$u'v + uv'$	Si $f(x) = x\sqrt{x}$ alors $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ avec $x \neq 0$
$\frac{1}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	$-\frac{v'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{1}{3x^2+2x+1}$ alors $f'(x) = -\frac{6x+2}{(3x^2+2x+1)^2}$
$\frac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$ alors $f'(x) = \frac{(2)(3x+2)-(2x-1)(3)}{(3x+2)^2} = \frac{7}{(3x+2)^2}$

Remarque. Seules les deux premières formules sont intuitives, les autres sont à apprendre par coeur.
En particulier, comme on l'a vu en activité, la dérivée d'un produit (ou d'un quotient) n'est pas égale au produit (ou au quotient) des dérivées.

Preuve. • Montrons que $(ku)' = ku'$

$$\frac{ku(a+h) - ku(a)}{h} = \frac{k[u(a+h) - u(a)]}{h} = k\frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

Donc, lorsque h *tend* vers 0, $\frac{ku(a+h) - ku(a)}{h}$ *tend* vers la même chose que $k\frac{u(a+h) - u(a)}{h}$, c'est-à-dire ku'

- Montrons que $(u + v)' = u' + v'$

$$\frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) + v(a+h) - u(a) - v(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

Donc, lorsque h *tend* vers 0, $\frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h}$ *tend* vers la même chose que $\frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$, c'est-à-dire $u' + v'$

- Montrons que $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$$\frac{\frac{1}{u(a+h)} - \frac{1}{u(a)}}{h} = \frac{\frac{u(a)-u(a+h)}{u(a+h)u(a)}}{h} = \left(\frac{u(a) - u(a+h)}{h}\right)\frac{1}{u(a+h)u(a)}$$

Lorsque que h *tend* vers 0, $\frac{u(a) - u(a+h)}{h}$ *tend*, par définition, vers $-u'(a)$ et $\frac{1}{u(a+h)u(a)}$ *tend* vers $\frac{1}{u^2(a)}$, donc $\frac{\frac{1}{u(a+h)} - \frac{1}{u(a)}}{h}$ *tend* vers $-\frac{u'(a)}{u^2(a)}$

- On admettra que $(uv)' = u'v + uv'$
- Montrons que $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

On a vu que $(uv)' = u'v + uv'$, or $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$, donc $\left(\frac{u}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'v}{v^2} - \frac{uv'}{v^2}$

- On admettra les autres propriétés.

◊

On admettra le résultat suivant :

Propriété 7.3. *Soit $f(x) = g(mx+p)$ où m et p sont des réels et g une fonction définie et dérivable, alors f est dérivable et $f'(x) = mg'(mx+p)$*

Exemple 7.1. Soit f définie sur $\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{3x-1}$.
On a $f(x) = g(3x-1)$ avec $g(X) = \sqrt{X}$.
Or $g'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$ pour $X > 0$.
Donc $f'(x) = 3g'(3x-1) = 3\frac{1}{2\sqrt{3x-1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$ pour $x \in \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

7.3 Applications de la fonction dérivée

7.3.1 Activités

ACTIVITÉ 7.5 (Variations d'une fonction)**.**
Reprenons la fonction de l'activité 7.1 page 60 : $f(x) = -x^2 + 4$ et rappelons que le nombre dérivé en x est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x.

1. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice graphique et par lecture graphique, les variations de f en fonction de x.
2. Comment cela se traduit-il pour les coefficients directeurs des tangentes à la courbe ?
3. En déduire un lien entre les variations de f et la fonction dérivée f'.

ACTIVITÉ 7.6 (Extremum local)**.**
On s'intéresse à la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$

1. Montrer que $f'(x) = 3x^2 - 3$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
3. Dresser le tableau des variations de f, en faisant apparaître une ligne indiquant le signe de f'.
4. Qu'observe-t-on en -1 et en 1, pour f ? Comment cela se traduit-il pour f' ?

On dit que f admet en -1 et en 1 des extremums locaux.

7.3.2 Bilan et compléments

On a vu que la tangente à la courbe au point d'abscisse x est la droite la plus proche de la courbe au voisinage du point de la courbe d'abscisse x. Il est *naturel* de penser que lorsque la tangente *monte*, la courbe *monte* et que lorsque la tangente *descend*, la courbe *descend*, et réciproquement ou, plus mathématiquement, que lorsque la fonction affine dont la tangente est la représentation graphique est croissante (respectivement décroissante), f est aussi croissante (respectivement décroissante) et réciproquement. Or la croissance et la décroissance d'une fonction affine dépendent du signe de son coefficient directeur, ici $f'(x)$. Ainsi, étudier les variations de f revient donc à étudier le signe de sa fonction dérivée selon les valeurs de x.
On admettra donc le résultat suivant :

Théorème 7.4. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée*
- $f'(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in I \Leftrightarrow f$ *croissante sur* I
- $f'(x) \leq 0$ *pour tout* $x \in I \Leftrightarrow f$ *décroissante sur* I
- $f'(x) = 0$ *pour tout* $x \in I \Leftrightarrow f$ *constante sur* I

On admettra aussi la propriété suivante :

Propriété 7.5. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (respectivement $f'(x) < 0$), alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante)*

Remarque. On notera qu'on n'a pas l'équivalence ($\Leftrightarrow$) dans ce cas, une fonction pouvant être strictement croissante avec une dérivée qui s'annule seulement en quelques valeurs. C'est le cas, par exemple, de la fonction cube, dont la dérivée s'annule seulement en 0.

Par ailleurs, lorsque la fonction change de sens de variation en a, on dit qu'elle admet un extremum local en a (minimum ou maximum). On a donc :

Propriété 7.6. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant a et f' sa fonction dérivée.*
f' s'annule et change de signe en $a \Leftrightarrow f$ admet un extremum local en a

On l'admettra.
On a un maximum lorsque $f'(x)$ est positive avant a et négative après, et un minimum lorsque $f'(x)$ est négative avant a et positive après.

Remarque. Local signifie qu'aux alentours de a ce sera un extremum mais, qu'ailleurs, il se peut que f prenne des valeurs supérieures ou inférieures à cet extremum comme on a pu le voir dans l'activité 7.6.

7.4 Exercices

7.4.1 Technique

EXERCICE 7.1.
Montrer que la fonction racine carrée est dérivable en tout nombre appartenant à $]0;+\infty[$ mais pas en 0

EXERCICE 7.2.
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=3x^4-2x^3+5x-4$
2. $f(x)=4x^2-3x+1$
3. $f(x)=(2x+3)(3x-7)$ pour $x\neq\frac{7}{3}$
4. $f(x)=\frac{2x+4}{3x-1}$ pour $x\neq\frac{1}{3}$
5. $f(x)=\frac{x+5}{x^2+1}$
6. $f(x)=\left(2x^2+3x+1\right)^5$
7. $f(x)=\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)$

EXERCICE 7.3.
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

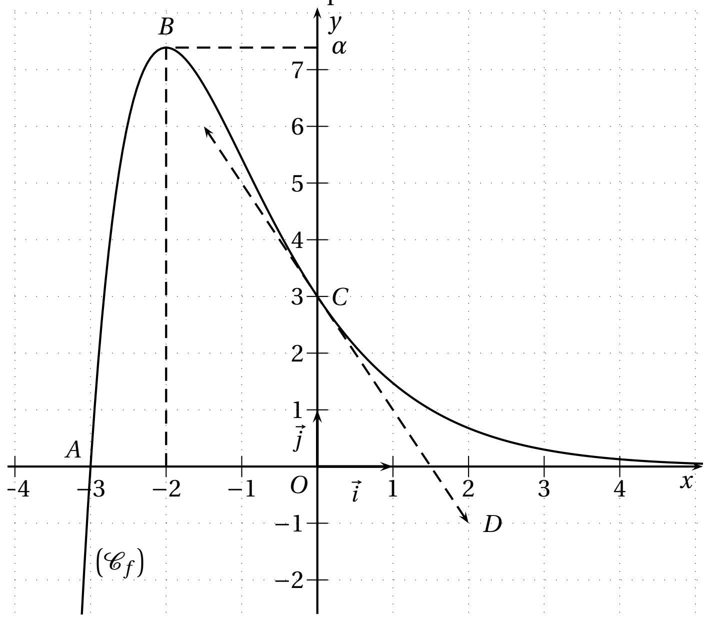
1. $f(x)=\left(x^2+x+1\right)^2$
2. $f(x)=(x-1)^4(x+1)^4$
3. $f(x)=x^3\left(1+\sqrt{x}\right)$
4. $f(x)=4x^2\sqrt{x}$
5. $f(x)=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)$
6. $f(x)=\sqrt{2-x}$

7.4.2 Lectures graphiques

EXERCICE 7.4.
La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de la figure 7.1 de la présente page est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,+\infty[$.
On donne les renseignements suivants :

- les points $A(-3;0)$, $B(-2;\alpha)$ où $\alpha\approx 7{,}39$ et $C(0;3)$ sont des points de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$;
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ en $+\infty$.
- la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-2;+\infty[$;
- la droite tangente à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ en son point C passe par le point $D(2;-1)$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

FIGURE 7.1 – Repère de l'exercice 7.4



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse à l'aide des renseignements ci-dessus ou du graphique.

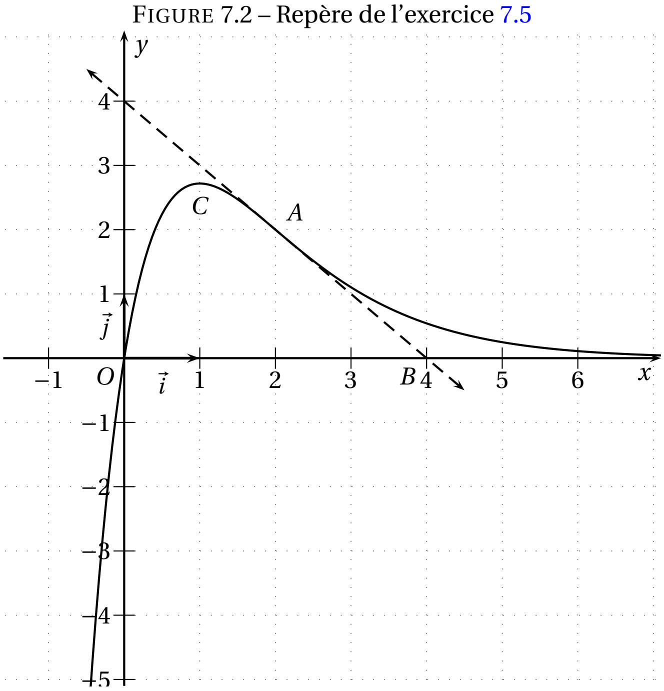
1. $f'(0)=-\frac{1}{2}$.
2. Pour tout x élément de l'intervalle $[-2;+\infty[$, on a : $f'(x)\leqslant 0$.
3. Soit une fonction g telle que $g'=f$ sur l'intervalle $[-4;+\infty[$, alors la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[-2;+\infty[$.

EXERCICE 7.5.
On a représenté sur la figure 7.2 de la présente page, dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur ℝ. La courbe Γ passe par les points $O(0;0)$ et $A(2;2)$.
La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ. La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
2. Une des représentations graphiques page suivante, représente la fonction dérivée g' de g. Déterminer laquelle.
3. Une des représentations graphiques page ci-contre, représente une fonction h telle que $h' = f$ sur ℝ. Déterminer laquelle.

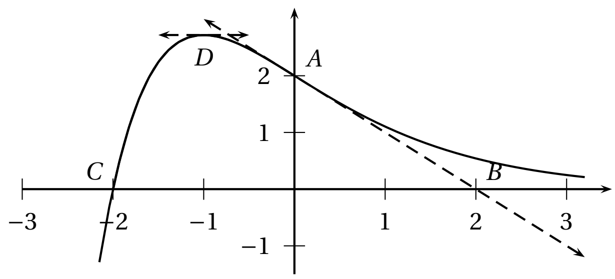
Vous justifierez vos choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

FIGURE 7.2 – Repère de l'exercice 7.5



EXERCICE 7.6.
On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie sur ℝ. La courbe Γ passe par les points $A(0\ ;\ 2)$ et C$(-2\ ;\ 0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une fonction h telle que $h' = f$ sur ℝ. Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction h.
Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix



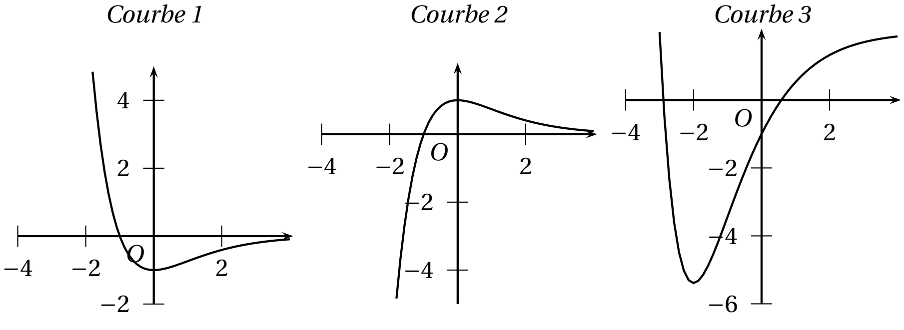
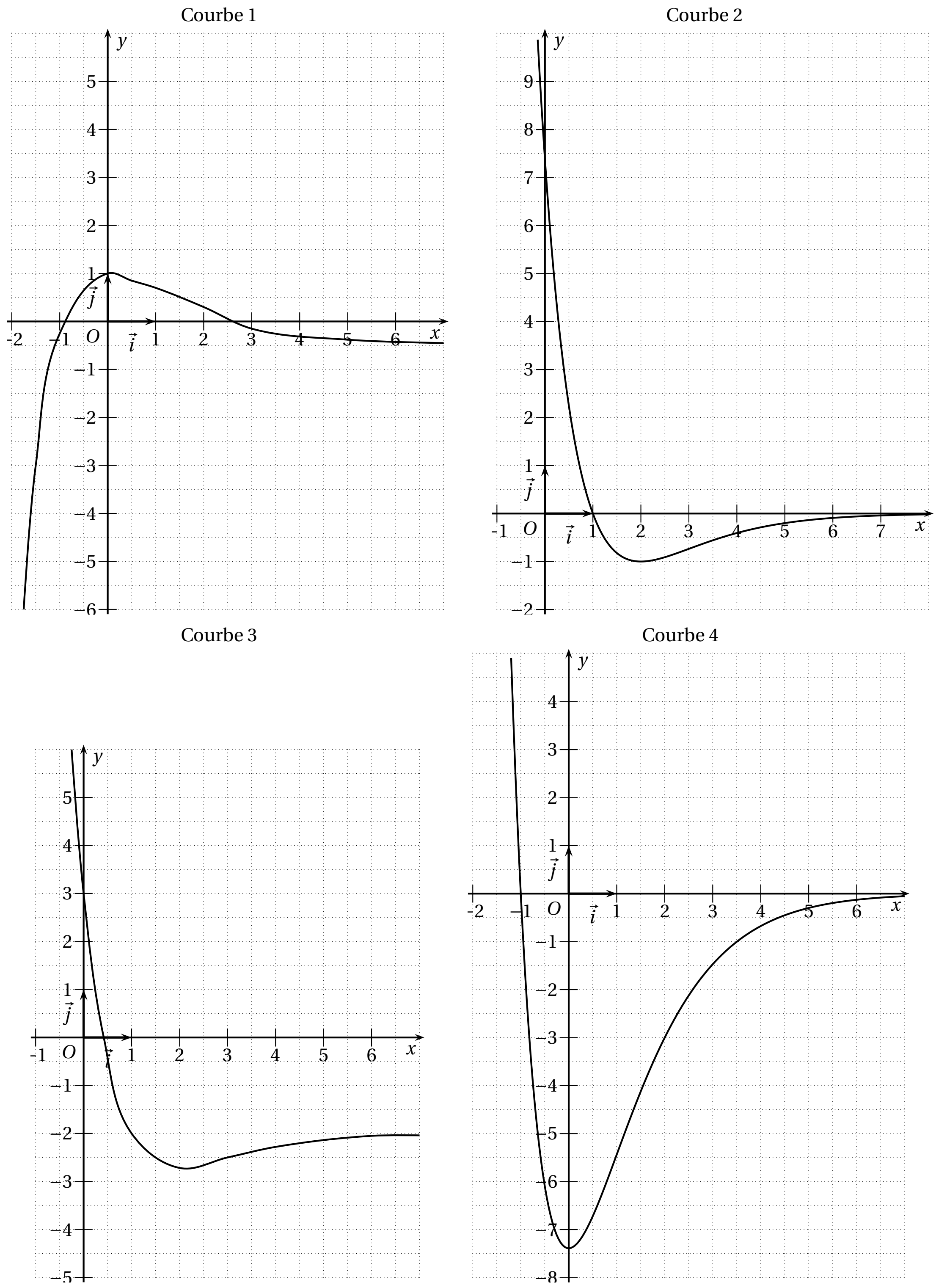


FIGURE 7.3 – Courbes de l'exercice 7.5



EXERCICE 7.7.
La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;6]$.
Soit A le point du plan de coordonnées $(-1\,;0)$ et B le point du plan de coordonnées $(1\,;5)$. Le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.

1. Déterminer $f'(1)$, où f' est la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.
2. L'une des trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, et $\mathscr{C}_3$ représentées sur les figures 1, 2 et 3 de la présente page représente la fonction f'. Laquelle ? *Justifier votre réponse.*

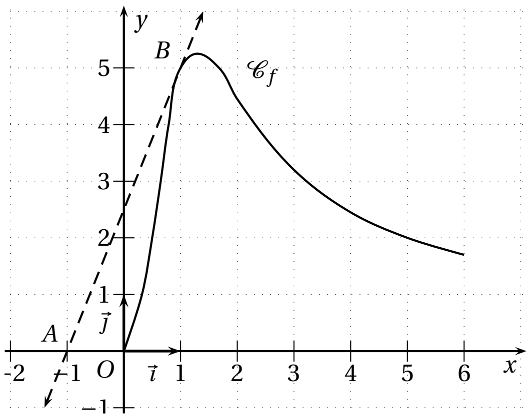


FIGURE 7.4 – Courbes de l'exercice 7.7

Figure 1

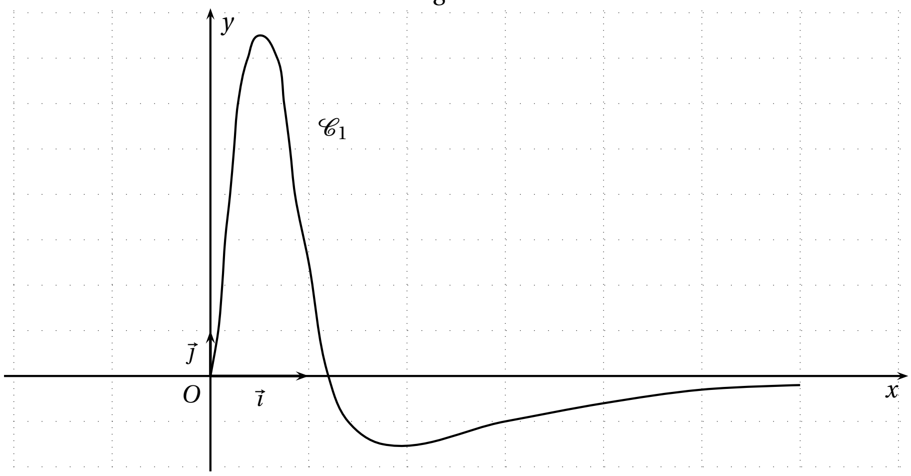


Figure 2

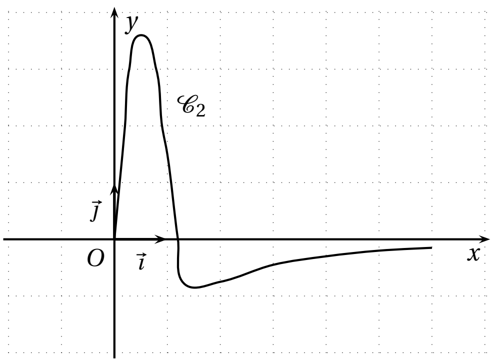
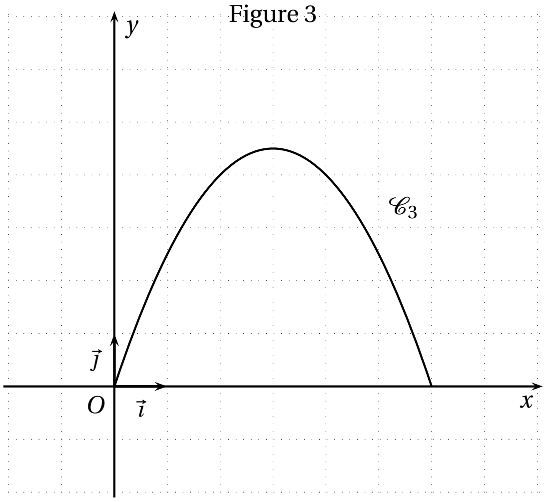


Figure 3



7.4.3 Études de fonctions

EXERCICE 7.8.
Soit $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
2. En déduire les variations de f.
3. Dresser le tableau des variations de f en y indiquant le signe de la fonction dérivée.
4. Montrer que f admet un extremum.

EXERCICE 7.9.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

1. Calculer la dérivée f' de f. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f en précisant les éventuels extremums.
2. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-1;3]$.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

EXERCICE 7.10.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$ On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer T, les tangentes parallèles à l'axe des abscisses puis $\mathscr{C}$.

EXERCICE 7.11.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \frac{1}{x} + x$

1. Déterminer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Étudier le signe de la dérivée g'.
3. Dresser le tableau des variations de g.
4. Déterminer si g admet des extremums locaux.
5. Tracer la représentation graphique de la fonction g

EXERCICE 7.12.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation grahique.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Soit A le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}$ en A.
3. Soit B le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathscr{C}$ en B.
4. Tracer dans un même repère T_A, T_B et $\mathscr{C}$.

EXERCICE 7.13.
On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3x$ et $g(x) = x^3 - 3x$.

1. Calculer la dérivée f' de f, étudier son signe et dresser le tableau des variations de f.
2. Faire de même pour g.
3. (a) Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant les fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-2; 2]$ et on prendra un pas de 0,5).
   (b) À l'aide du graphique, déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs coordonnées.
   (c) Retrouver ces résultats par le calcul.

EXERCICE 7.14.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.
2. Dresser le tableau des variations de f en précisant la valeur M de son maximum et la valeur m de son minimum.
3. Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-4;4]$.

EXERCICE 7.15.
On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1$ et $g(x) = \frac{x^2}{x-1}$

1. Calculer la dérivée f' de f, étudier son signe et en déduire le tableau des variations de f.
2. Calculer la dérivée g' de g, étudier son signe et en déduire le tableau des variations de g.
3. (a) Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant les fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-3;5]$ et on prendra un pas de 0,25).
   (b) Á l'aide du graphique, déterminer le nombre de points d'intersections entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs coordonnées.
   (c) Retrouver ces résultats par le calcul.

EXERCICE 7.16.
Question préliminaire : factoriser le polynôme $P(x) = x^2 + 2x - 3$
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 + 1$ et $g(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Calculer les dérivées f' et g'. Étudier leur signe.
2. Dresser les tableaux des variations des fonctions f et g.
3. Tracer les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-3;3]$).
4. Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) \leq g(x)$. (On pourra utiliser la question préliminaire).

EXERCICE 7.17.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
4. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
5. Peut-on trouver des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$?
6. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente a pour coefficient directeur -3.

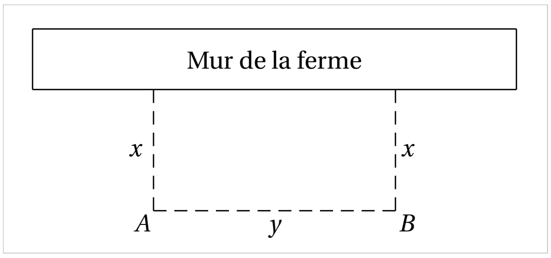
7.4.4 Problèmes

PROBLÈME 7.1.
On considère un rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm.

1. Déterminer ses dimensions (Longueur L et largeur l) sachant que son aire S est égale à $\frac{3}{4}$ cm^2
2. On recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.
   (a) Exprimer S en fonction de l
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2 - x)$.
   Calculer la dérivée f' et étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f. Tracer sa représentation graphique $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0;2]$.
   (c) En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm et l'aire S est maximale.

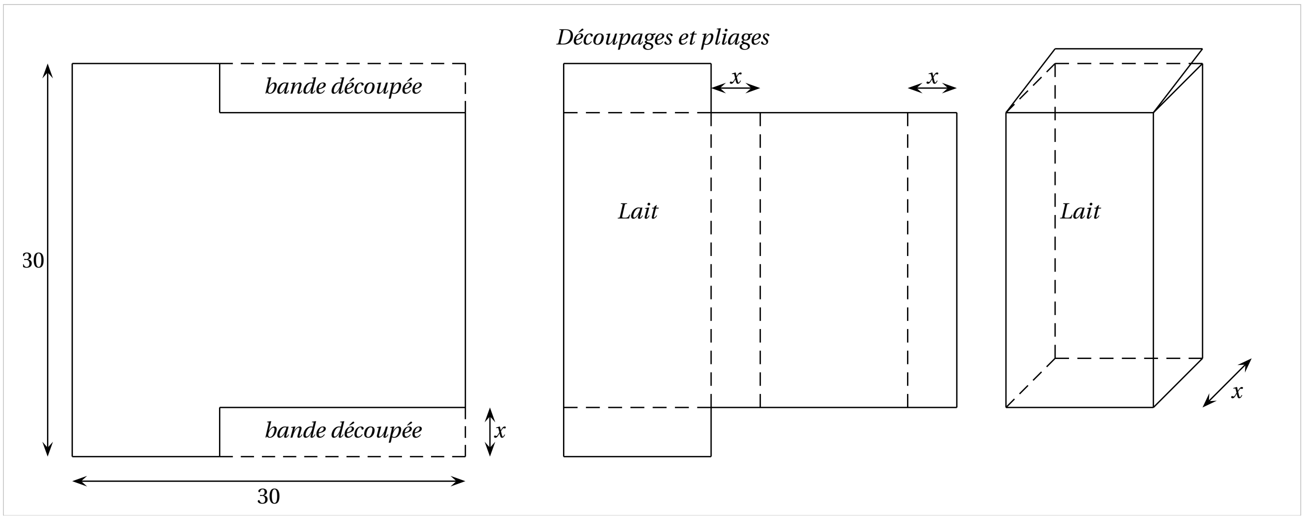
PROBLÈME 7.2.
Un fermier décide de réaliser un poulailler (de forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m^2. Où doit-on placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale ?
La figure ci-dessous représente le poulailler accolé à la ferme en *vue de dessus*. On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distace entre les deux piquets A et B. (On a donc $x > 0$ et $y > 0$).

1. Sachant que l'aire du poulailler est de 392 m^2, exprimer y en fonction de x.
2. Démontrer que la longueur $l(x)$ du grillage est : $l(x) = \frac{2x^2+392}{x}$
3. Calculer la dérivée l' de l. en déduire le tableau des variations de l.
4. En déduire les dimensions x et y pour lesquelle la clôture a une longueur minimale. Préciser cette longueur.



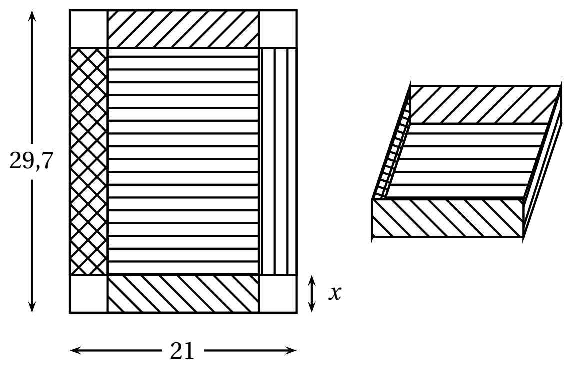
PROBLÈME 7.3. 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$
   (a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;20]$. Dresser le tableau des variations de f.
   (b) Déterminer une équation de la tangente Δ à la représentation graphique de f au point d'abscisse 0.
   (c) Déterminer, par calcul, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
   (d) Tracer Δ et la représentation graphique de f pour $x \in [0;20]$.

2. Un fabricant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée (voir la figure de la présente page). Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par x la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées. On suppose que $0 < x < 15$.
   (a) Démontrer que le volume (en cm^3) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.
   (b) Pour quelle valeur de x le volume $V(x)$ est-il maximal ? Préciser la valeur de ce volume maximal en litres.



PROBLÈME 7.4.
On dispose d'une feuille de dimensions 21 cm × 29,7 cm avec laquelle on veut fabriquer une boite sans couvercle. Pour cela on découpe aux quatre coins de la feuille un carré de côté x. On obtient le patron de la boite. On se propose d'étudier le volume de la boite en fonction de x.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. On appelle $V(x)$ le volume de la boite.
   (a) Montrer que $V(x) = x(29,7 - 2x)(21 - 2x)$.
   (b) Étudier les variations de V.
   (c) En déduire la (ou les) valeur(s) de x pour laquelle (lesquelles) le volume de la boite est maximum. *On donnera le(s) résultat(s) au millimètre.*



PROBLÈME 7.5.
Quel doit être le format (hauteur, rayon) d'une boite de conserve cylindrique pour que, pour un volume donné, la quantité de métal pour la concevoir, qu'on supposera proportionnelle à sa surface, soit minimale.

PROBLÈME 7.6.
Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique d la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x-2}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Déterminer a et b tels que la droite d'équation $y = 8$ soit tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.
3. Déterminer l'abscisse de l'autre point de $\mathscr{C}$ où la tangente est horizontale.

PROBLÈME 7.7.
Une parabole $\mathscr{P}$ admet, dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, une équation du type : $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Déterminer les coefficients a, b et c sachant que $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 3, l'axe des ordonnées au point B d'ordonnées 2 et qu'elle admet en ce point la droite d'équation $y = 2x + 2$ pour tangente.
Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de $\mathscr{P}$ avec l'axe des abscisses.

PROBLÈME 7.8.
Une entreprise fabrique x portes blindées par jour, x variant de 0 à 120. On estime que le coût total de fabrication, noté $C(x)$, est donné, en euros, par : $C(x) = 0,001x^3 - 0,1x^2 + 95x + 1500$.
La recette de l'entreprise obtenue par la vente de x portes, notée $R(x)$, en euros, est donnée par : $R(x) = 228x$.
On suppose que chaque porte est vendue.

1. Étude de la fonction bénéfice
   (a) Exprimer $B(x)$ en fonction de x.
   (b) Calculer $B'(x)$ pour tout x de $[0;120]$.
   (c) Étudier le signe de $B'(x)$ puis dresser le tableau des variations de la fonction B.
   (d) À l'aide du tableau de variation et d'un tableau de valeurs donné par la calculatrice, donner les arrondis au dixième des solutions de l'équation $B(x) = 0$.
   En déduire le nombre de portes vendues pour que la fabrication soit rentable. Justifier votre réponse.
   (e) Pour quel nombre de portes vendues, le bénéfice est-il maximal ? Justifier votre réponse.
2. Courbe représentative de la fonction B
   (a) Dans un repère orthogonal, tracer la courbe représentative de la fonction B.
   (b) Vérifier graphiquement vos réponses aux questions d) et e) de la partie 1.

PROBLÈME 7.9.
Une entreprise fabrique des pizzas comptées par lots de 40 pizzas. On suppose qu'elle vend toute sa production. Les coûts de production sont, d'une part, les coûts fixes (amortissement du four, assurances, etc.), d'autre part, les coûts variables (ingrédients, salaires, etc.) qui dépendent du nombre q de lots fabriqués.
On estime que la fonction de coût total de cette entreprise est donnée par la fonction suivante :

$$C(q) = \frac{1}{2}q^3 - 2q^2 + 5q + 20$$

où q est le nombre de lots fabriqués et $C(q)$ est exprimé en dizaine d'euros.

1. Études du coût marginal et du coût total.
   Le coût marginal, noté $C_m(q)$ est, pour une quantité q donnée, l'augmentation du coût occasionnée par la production d'une unité supplémentaire. Sa valeur exacte est donc $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$ mais dans la pratique on prend la valeur approchée $C_m(q) = C'(q)$, la différence entre les deux valeurs étant négligeable.
   (a) Étudier les variations de la fonction C sur l'intervalle $[1;8]$.
   (b) Étudier les variations de la fonction C' sur l'intervalle $[1;8]$.
   (c) Représenter graphiquement, dans le même repère, les fonctions C et C' (unités graphiques : 2 cm pour un lot en abscisses et 1 cm pour 5 dizaines d'euros en ordonnées).
2. Étude du coût moyen.
   Le coût de production par unité produite est appelé coût moyen de production ; on le note généralement $C_M(q)$.
   On a donc $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$.
   (a) Une fonction auxiliaire
   Soit $D(q)$ la fonction définie sur $[1;8]$ par $D(q) = q^3 - 2q^2 - 20$
      i. Étudier les variations de $D(q)$ puis dresser son tableau de variations.
      ii. En déduire que l'équation $D(q) = 0$ admet une unique solution q_0 dans $[1;8]$.
      iii. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de q_0 au dixième.
   (b) Expliquer pourquoi l'entreprise à tout intérêt à produire une quantité telle que $C_M(q)$ soit minimale.
   (c) Montrer que $C'_M(q) = \frac{q^3-2q^2-20}{q^2}$
   (d) Dresser le tableau des variations de C_M
   (e) En déduire la production optimale de l'entreprise.
   (f) i. Représenter C_M dans le même graphique que C et C_m.
      ii. Déterminer l'abscisse du point d'intersection des courbes de C_M et C_m.
      Que constate-t-on ? *Cette propriété est toujours vraie.*

3. Concurrence parfaite.
   Dans cette partie on suppose que l'on est en situation de concurrence parfaite, c'est-à-dire que le prix de vente est imposé par le marché.
   Le prix de vente du lot est calculé à partir du prix de vente unitaire fixé à 7,5 €la pizza.
   (a) Calculer le prix de vente d'un lot de pizzas.
   Quelle est la recette $R(q)$, en dizaines d'euros, pour q lots vendus ?
   (b) Sur le même graphique que précédemment, tracer la droite d'équation $y = 30$.
   (c) « Tant que le coût marginal est inférieur au prix de vente, l'entreprise a intérêt à produire. »
   Expliquer pourquoi.
   (d) Le bénéfice produit par la vente de q lots de pizzas est $B(q) = R(q) - C(q)$.
   Étudier les variations de la fonction B et en déduire la production qui assure le bénéfice maximal.
   Que représente cette production sur le graphique précédent ?

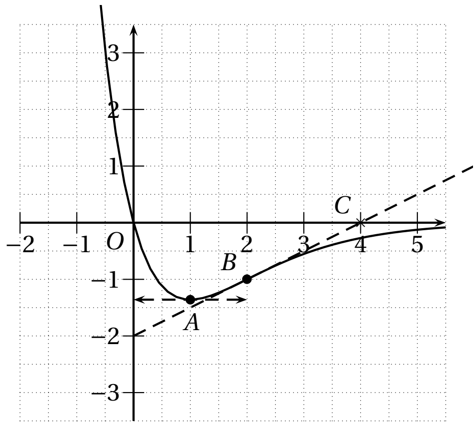
Devoir surveillé n°7

Fonction dérivée

EXERCICE 7.1 (3 points)**.**
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

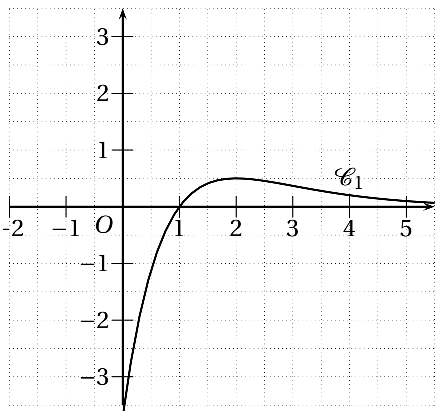
- $f(x) = x\sqrt{x}$
- $g(x) = x^3 + 4x^2 - 5x - 2$
- $h(x) = \frac{2x+1}{-x+5}$

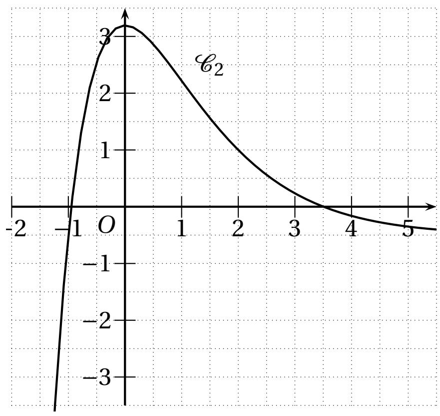
EXERCICE 7.2 (5 points)**.**
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure ci-contre est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne les renseignements suivants :

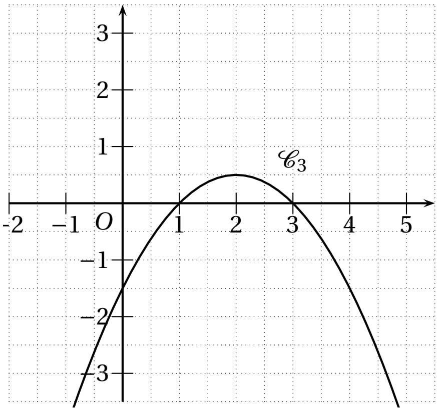


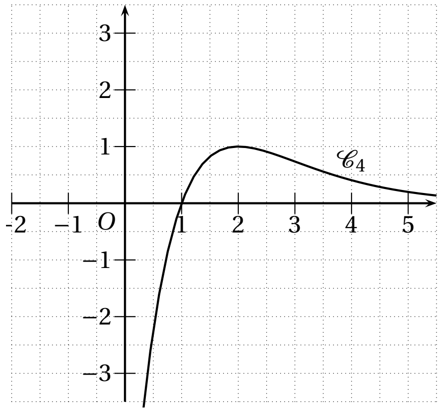
- la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 ;
- le point $B(2\,;-1)$ appartient à $\mathscr{C}$;
- la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B passe par le point $C(4\,;0)$;

1. Déterminer graphiquement $f(2)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Une des représentations graphiques ci-dessous représente la fonction dérivée f' de f. En justifiant votre choix *à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques*, déterminer la courbe associée à la fonction f'.
3. Une des représentations graphiques ci-dessous représente une fonction h telle que $h' = f$. En justifiant votre choix *à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques*, déterminer la courbe associée à la fonction h.









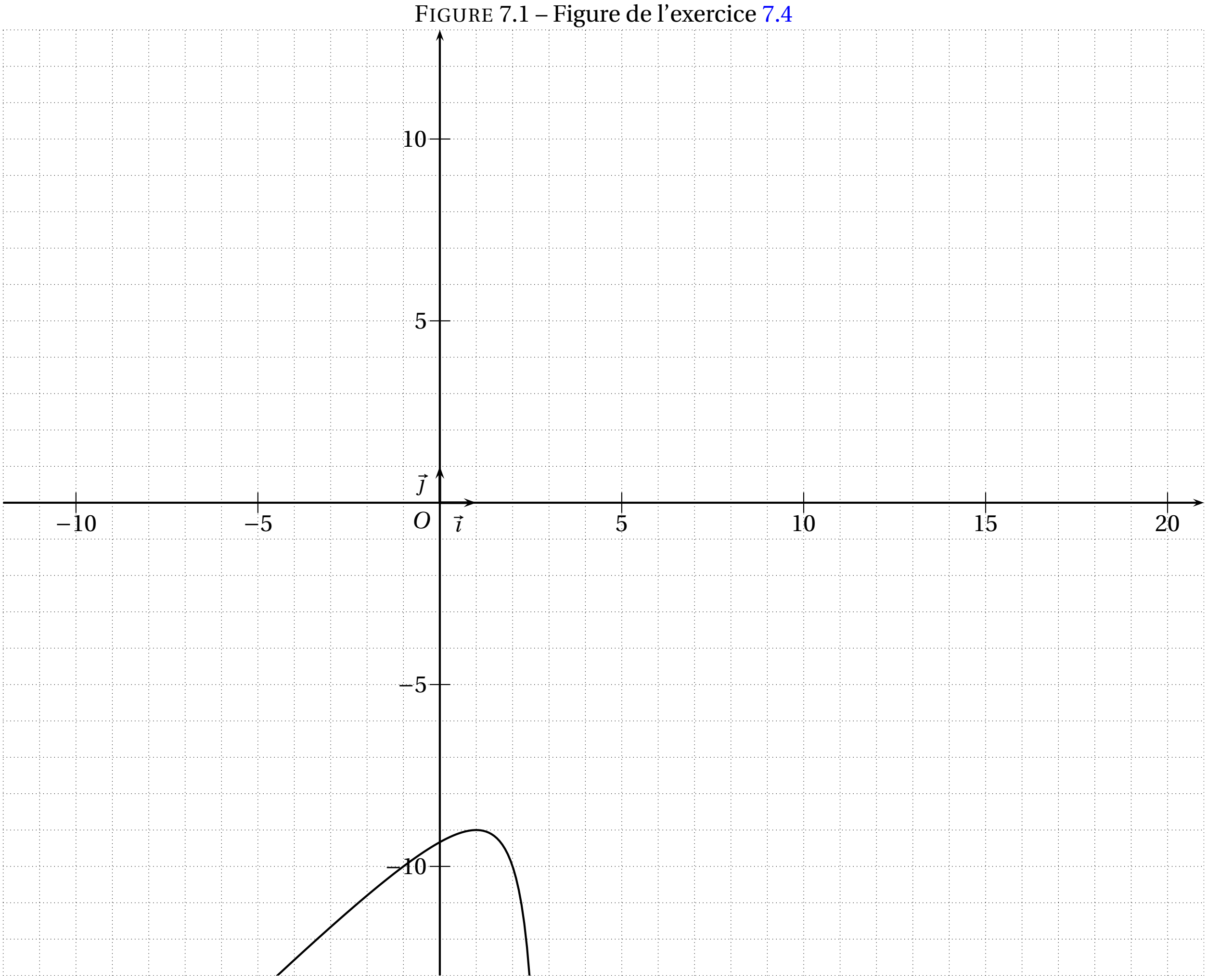
EXERCICE 7.3 (4 points)**.**
Une entreprise fabrique x portes blindées par jour, x variant de 0 à 120. On estime que le coût total de fabrication, noté $C(x)$, est donné, en euros, par : $C(x) = 0,001x^3 + 0,078x^2 + 205,9x + 1500$.
La recette de l'entreprise obtenue par la vente de x portes, notée $R(x)$, en euros, est donnée par : $R(x) = 250x$.
On suppose que chaque porte est vendue.
La fonction $B(x)$ est le bénéfice, en euros, obtenu par la vente de x portes

1. Montrer que $B(x) = -0,001x^3 - 0,078x^2 + 44,1x - 1500$.
2. Pour quel nombre de portes vendues, le bénéfice est-il maximal et quel est alors ce bénéfice ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 7.4 (8 points)**.**
f est la fontion définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-11x+28}{x-3}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
On donne en annexe de la présente page un repère dans lequel une partie de $\mathscr{C}$ est déjà tracée.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et on note f' la fonction dérivée de f.
   (a) Justifer que $f'(x) = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et établir le tableau de variation de la fonction f (on indiquera les extremums locaux de f).
2. (a) Déterminer, s'il y en a, les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
   (b) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de T.
3. (a) Tracer les tangentes de la question 2.
   (b) Compléter le tracé de $\mathscr{C}$.

FIGURE 7.1 – Figure de l'exercice 7.4



Chapitre 8

Algorithmique

Sommaire

Ce chapitre sera traité au fur et à mesure de l'année. Il vise à réactiver les acquis en algorithmique de la classe de Seconde (affectations de variables, entrées, sorties, instructions conditionnelles) et à les compléter avec ceux de la classe de Première (boucles). Il n'est constitué que d'exercices qui seront, pour la plupart, à éxécuter avec le programme libre Algobox.

8.1 Lectures d'algorithmes

EXERCICE 8.1.
Que fait l'algorithme suivant ?

```
VARIABLES
  x, y : nombres
DEBUT
  Saisir x
  y prend la valeur x+3
  y prend la valeur y^2
  y prend la valeur y-4
  Afficher y
FIN
```

EXERCICE 8.2.
Que fait l'algorithme suivant ?

```
VARIABLES
  x_A, y_A, x_B, y_B, x_I, y_I  : nombres
DEBUT
  Saisir x_A
  Saisir y_A
  Saisir x_B
  Saisir y_B
  x_I prend la valeur (x_A+x_B)/2
  y_I prend la valeur (y_A+y_B)/2
  Afficher x_I
  Afficher y_I
FIN
```

EXERCICE 8.3.
Que fait l'algorithme suivant ?

```
VARIABLES
  age : nombre
DEBUT
  Saisir age
  Si (age<18)
    alors afficher le message "5,5 euros"
    sinon afficher le message "7 euros"
FIN
```

EXERCICE 8.4.
Que fait l'algorithme suivant ?

```
VARIABLES
  age, prix, final  : nombres
DEBUT
  Saisir age
  Saisir prix
  Si (age<18)
    alors final prend la valeur prix*0,9
    sinon final prend la valeur prix
  Afficher final
FIN
```

EXERCICE 8.5.
Que fait l'algorithme suivant ?

```
VARIABLES
  x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, a, b, c : nombres
DEBUT
  Lire x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C
  c prend la valeur RACINE((x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2)
  b prend la valeur RACINE((x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2)
  a prend la valeur RACINE((x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2)
  Si (a=b et b=c)
    alors afficher le message "Il l'est"
    sinon afficher le message "Il ne l'est pas"
FIN
```

EXERCICE 8.6.
Que fait l'algorithme suivant ?

```
VARIABLES
  x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, a, b, c : nombres
DEBUT
  Lire x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C
  c prend la valeur RACINE((x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2)
  b prend la valeur RACINE((x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2)
  a prend la valeur RACINE((x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2)
  Si (a=b ou b=c ou a=c)
    alors afficher le message "Il l'est"
    sinon afficher le message "Il ne l'est pas"
FIN
```

EXERCICE 8.7.
Que fait l'algorithme suivant ?

```
VARIABLES
  k : nombre
DEBUT
  Pour k allant de 1 à 10 afficher k
FIN
```

EXERCICE 8.8.
Que fait l'algorithme suivant ?

```
VARIABLES
  k, n : nombres
DEBUT
  Afficher le message
    "Entrer un entier n plus grand que 1"
  Saisir n
  Pour k allant de 1 à n afficher k
FIN
```

EXERCICE 8.9.
Que fait l'algorithme suivant ?

```
VARIABLES
  k, n : nombres
DEBUT
  Afficher le message
    "Entrer un entier n plus grand que 1"
  Saisir n
  Pour k allant de 1 à n
    afficher le message
      "Pète et Repète sont dans un bateau.
      Pète tombe à l'eau.
      Que reste-t-il sur le bateau ?"
FIN
```

EXERCICE 8.10.
Que fait l'algorithme suivant ?

```
VARIABLES
  k, n, S : nombres
DEBUT
  Afficher le message
    "Entrer un entier n plus grand que 0"
  Saisir n
  S prend la valeur 0
  Pour k allant de 0 à n
    S prend la valeur S+k
  Afficher S
FIN
```

EXERCICE 8.11.
Que fait l'algorithme suivant ?

```
VARIABLES
  k, n, S : nombres
DEBUT
  Afficher le message
    "Entrer un entier n plus grand que 1"
  Saisir n
  S prend la valeur 1
  Pour k allant de 1 à n
    S prend la valeur S*k
  Afficher S
FIN
```

EXERCICE 8.12.
Le but de cet exercice est, dans un premier temps, de déterminer ce que fait l'algorithme puis, dans un second temps, de le modifier pour lui faire faire autre chose.

1. Que fait l'algorithme suivant ?

```
VARIABLES
  k, n, C : nombres
DEBUT
  Afficher le message
    "Entrer un entier n plus grand que 1"
  Saisir n
  C prend la valeur 0
  Pour k allant de 1 à n
    Si (k divise n) alors C prend la valeur C+1
  Afficher C
FIN
```

2. On souhaite modifier cet algorithme pour qu'il renvoie la somme des diviseurs de l'entier naturel n. Quelle(s) ligne(s) faut-il modifier ?
3. On souhaite modifier cet algorithme pour qu'il renvoie le produit des diviseurs de n. Quelle(s) ligne(s) faut-il modifier ?

8.2 Écritures d'algorithmes

EXERCICE 8.13 (Pourcentages, suites).
Écrire :

1. un programme qui prend comme arguments le prix d'un article et le taux d'évolution et renvoyant le prix de l'article après évolution ;
2. un programme qui prend comme arguments le prix d'un article et le taux d'évolution renvoyant le prix de l'article qui a subit cette évolution 10 fois consécutives.
3. un programme qui prend comme arguments le prix d'un article et le taux d'évolution renvoyant le prix de l'article qui a subit cette évolution 10 fois consécutives ainsi que tous les prix intermédiaires.
4. un programme qui prend comme arguments le prix d'un article, le taux d'évolution et le nombre de fois que l'article a subit cette évolution et renvoyant le prix final de l'article qui a subit ces évolutions ainsi que tous les prix intermédiaires.

EXERCICE 8.14 (Second degré).
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme.
Écrire un programme :

1. qui prend comme arguments a, b, c et une valeur de x et renvoyant $f(x)$;
2. qui prend comme arguments a, b, c, une valeur entière minimale de x et une valeur entière maximale de x et renvoyant $f(x)$ pour toutes les valeurs entières de x entre ces deux extrêmes ;
3. qui prend comme arguments a, b, c, une valeur entière minimale de x et une valeur entière maximale de x et représentant les points de la courbe de f du point précédent ;
4. qui prend comme arguments a, b, c et renvoyant la valeur du discriminant ;
5. qui prend comme arguments a, b, c et renvoyant le nombre de racines de $f(x)$;
6. qui prend comme arguments a, b, c et renvoyant les racines éventuelles de $f(x)$;

EXERCICE 8.15 (Suites).
On donne $u_n = (-1)^n$, $v_n = n + (-1)^n$, $w_{n+1} = 0,5w_n + 400$ et $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$. Écrire un programme :

1. qui prend comme argument n et renvoyant u_n ;
2. qui prend comme argument n et renvoyant v_n ;
3. qui prend comme argument n et renvoyant toutes les valeurs de v_n de 0 jusqu'à n ;
4. qui prend comme arguments w_0 et n et renvoyant w_n ;
5. qui prend comme arguments w_0 et n et renvoyant toutes les valeurs de w_n de 0 jusqu'à n ;
6. qui prend comme arguments x_0, x_1 et n et renvoyant x_n ;
7. qui prend comme arguments x_0, x_1 et n et renvoyant toutes les valeurs de x_n de 0 jusqu'à n ;

EXERCICE 8.16 (Suite de Syracuse).
On appelle suite Syracuse, la suite définie par : $u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$

1. Écrire un algorithme prenant comme arguments u_0 et n et renvoyant toutes les valeurs de u_n de 0 à n.
2. Tester l'algorithme pour différentes valeurs de u_0 et de n. Que peut-on conjecturer ?
3. On définit les termes suivants :
   - la suite des termes correspondant à u_0 est appelée le *vol de* u_0 les termes successifs de la suite sont eux appelés les *étapes du vol* ;
   - le plus grand nombre obtenu dans la suite est appelé l'*altitude maximale du vol* et le nombre d'étapes (n) avant d'obtenir 1 est appelé la *durée de vol*.

   Compléter le tableau suivant :

Vol pour	2	3	4	5	6	7	8	9	10	27	97	99	200	1000	10000
Altitude maximale															
Durée du vol															

Devoir surveillé n°8

Algorithmique

EXERCICE 8.1 (5 points)**.**
On donne l'algorithme suivant, écrit à l'aide du logiciel Algobox :

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Entrer un entier n supérieur à 1"
  LIRE n
  S PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    SI (n%k==0) ALORS
      DEBUT_SI
      S PREND_LA_VALEUR S+k
      FIN_SI
    FIN_POUR
  AFFICHER "S vaut "
  AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

On rappelle que, dans Algobox, $n\%k$ donne le reste de la division de n par k.

1. Que renvoie l'algorithme si l'on donne à n la valeur 5 ?
2. Que renvoie l'algorithme si l'on donne à n la valeur 9 ?
3. Que renvoie l'algorithme si l'on donne à n la valeur 10 ?
4. Plus généralement, que renvoie cet algorithme ?

EXERCICE 8.2 (5 points)**.**
Thomas loue un appartement pour 3 ans. Le contrat de location stipule que le loyer du premier mois est de 300 € et qu'il augmente chaque mois de 1 %.

1. Écrire un algorithme affichant pour chaque mois de location le montant du loyer que Thomas doit payer.
2. Comment modifier cet algorithme pour qu'il affiche aussi la somme des loyers payés sur les 3 ans ?

Chapitre 9

Suites arithmétiques et géométriques

Sommaire

9.1 Activité

Un étudiant loue un chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail :

- *Premier contrat* : un loyer de 200 € pour le premier mois, puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail ;
- *Second contrat* : un loyer de 200 € pour le premier mois, puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois, c'est-à-dire celui du 36$^{\text{è}}$ mois.
3. Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? (Justifier à l'aide de calculs).

9.2 Suites arithmétiques

9.2.1 Définition et premières propriétés

Définition 9.1. On appelle *suite arithmétique* toute suite (u_n) telle que

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n + r \text{ où } r \in \mathbb{R}$$

r est appelé *la raison* de la suite arithmétique.

Remarque. Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de montrer que, pour tout n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette constante sera alors la raison de la suite.

Exemples.

- La suite contituée des montants des loyers correspondants au premier contrat de l'activité est une suite arithmétique définie par $u_0 = 200$ € et $u_{n+1} = u_n + 5$ (qui s'arrête toutefois à $n = 36$).
- La suite formée par les nombres entiers naturels pairs est une suite arithmétique. Celle formée par les nombres entiers naturels impairs aussi.
- La suite définie par : pour tout n, $u_n = 3n - 2$ est arithmétique.
  En effet $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - (3n-2) = 3 \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + 3$ (de raison 3).

- La suite définie par : pour tout n, $u_n = n^2$ n'est pas arithmétique.
  En effet $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \neq$ constante.
  On peut le voir encore plus facilement sur les premiers termes :
  $u_1 - u_0 = 1 \neq u_2 - u_1 = 3$

Propriété 9.1. *Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et raison r. Alors, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr$*

Remarque. Cette propriété est importante car elle transforme une suite arithmétique, définie par récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$), en une suite définie explicitement ($u_n = f(n)$).

Preuve. Une démonstration rigoureuse sera réalisée éventuellement en Terminale. En première nous ne pouvons que faire la chose suivante :

$$\begin{aligned}
&u_1 = u_0 + r \\
&u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r \\
&u_3 = u_2 + r = u_0 + 3r \\
&\dots \\
&u_n = u_0 + nr
\end{aligned}$$

◊

9.2.2 Monotonie

Propriété 9.2. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :*
- *si $r > 0$, (u_n) est strictement croissante ;*
- *si $r < 0$, (u_n) est strictement décroissante ;*
- *si $r = 0$, (u_n) est constante.*

Preuve. Pour tout $n \geq 0$ on a $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$, ce qui donne le résultat. ◊

9.2.3 Somme de termes consécutifs

Propriété 9.3. *Soit (u_n) une suite arithmétique et n un entier naturel. Alors :*

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$$

Preuve. Pour tout i on a $u_i = u_0 + ir$ et on a aussi $u_i = u_n + (i-n)r$.
Écrivons S_n de deux manières :

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_0 + 1r + u_0 + 2r + \ldots + u_0 + (n-2)r + u_0 + (n-1)r + u_0 + nr \\
S_n &= u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots + u_2 + u_1 + u_0 = u_n + u_n - 1r + u_n - 2r + \ldots + u_n - (n-2)r + u_n - (n-1)r + u_n - nr
\end{aligned}$$

En additionnant les deux lignes, il vient :

$$2S_n = (u_0 + u_n)(n+1) \Leftrightarrow S_n = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$$

◊

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs *d'une suite arithmétique est :*

$$S = \frac{(1^{er}\ \text{terme} + \text{dernier}) \times (\text{nb de termes})}{2}$$

9.3 Suites géométriques

9.3.1 Définition et premières propriétés

Définition 9.2. On appelle *suite géométrique* toute suite (u_n) telle que

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = q \times u_n \text{ où } q \in \mathbb{R}$$

q est appelé *la raison* de la suite géométrique.

Remarques.

1. Si $q = 0$, tous les termes de la suite, hormis peut-être u_0 sont nuls.
   Si $u_0 = 0$, tous les termes de la suite sont nuls.
   En dehors de ces deux cas triviaux, inintéressants, tous les termes de la suite sont différents de zéro.
2. Pour démontrer qu'une suite est géométrique (en dehors des deux cas triviaux), il suffit de montrer que, pour tout n, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Cette constante sera alors la raison de la suite.

Exemples.

- La suite contituée des montants des loyers correspondants au second contrat de l'activité est une suite géométrique définie par $u_0 = 200$ € et $u_{n+1} = 1{,}02u_n$ (qui s'arrête toutefois à $n = 36$).
- La suite définie par : pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2^n$ est géométrique.
  En effet $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \Leftrightarrow u_{n+1} = 2u_n$ (de raison 2).
- La suite définie par : pour tout n, $u_n = n^2$ n'est pas arithmétique.
  En effet $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \neq$ constante.
  On peut le voir encore plus facilement sur les premiers termes :
  $\frac{u_2}{u_1} = 4 \neq \frac{u_3}{u_2} = \frac{9}{4}$

Propriété 9.4. *Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et raison q. Alors, pour tout entier naturel n, on a :*

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Remarque. Cette propriété est importante car elle transforme une suite géométrique, définie par récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$), en une suite définie explicitement ($u_n = f(n)$).

Preuve. Une démonstration rigoureuse sera réalisée éventuellement en Terminale. En première nous ne pouvons que faire la chose suivante :

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_0 \times q \\
u_2 &= u_1 \times q = u_0 \times q^2 \\
u_3 &= u_2 \times q = u_0 \times q^3 \\
&\ldots \\
u_n &= u_0 \times q^n
\end{aligned}$$

◇

9.3.2 Monotonie

On ne s'intéresse, en première, qu'à la monotonie de suites géométriques de raison positive et de premier terme positif. Si $q = 0$, tous les suites, hormis peut-être le premier sont nuls, aussi la suite géométrique est-elle stationnaire à partir du rang 1. En dehors de ce cas trivial, on a la propriété suivante :

Propriété 9.5. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q telle que $q > 0$, $q \neq 0$ et $q \neq 1$. Alors, si $u_0 > 0$:*

- *si $0 < q < 1$, (u_n) est strictement décroissante ;*
- *si $q > 1$, (u_n) est strictement croissante ;*
- *si $q = 1$, (u_n) est constante.*

Preuve. Pour tout $n \geq 0$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, ce qui donne le résultat. ◇

9.3.3 Somme de termes consécutifs

Propriété 9.6. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et n un entier naturel. Alors :*

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Preuve. Pour tout i on a $u_i = q^i u_0$.

$$\text{On a : } S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n = u_0 + qu_0 + q^2u_0 + \ldots + q^{n-1}u_0 + q^n u_0$$
$$\text{On a aussi : } qS_n = qu_0 + qu_1 + \ldots + qu_{n-1} + qu_n = qu_0 + q^2u_0 + \ldots + q^n u_0 + q^{n+1}u_0$$

En soustrayant la second ligne à la première, il vient :

$$S_n - qS_n = u_0 - q^{n+1}u_0 \Leftrightarrow S_n(1-q) = u_0\left(1-q^{n+1}\right) \Leftrightarrow S_n = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

◇

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs *d'une suite géométrique est :*

$$S = \textit{1}^{er} \textit{ terme} \frac{1-q^{\textit{nb de termes}}}{1-q}$$

9.4 Exercices

EXERCICE 9.1.
Pour chacune des suites données ci-dessous, où $n \in \mathbb{N}$:

- $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$;
- $v_n = 5 - 2n$;
- $w_n = (n+1)^2 - n^2$;
- $x_n = \frac{3^n}{n+1}$;
- $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Calculer les trois premiers termes.
2. La suite est-elle géométrique ? arithmétique ?
3. Si elle est arithmétique ou géométrique :
   (a) calculer le terme de rang 100 ;
   (b) calculer la somme des termes jusqu'au rang 100.

EXERCICE 9.2.
1. La suite (u_n) est artihmétique de raison $r = 8$. On sait que $u_{100} = 650$. Que vaut u_0 ?
2. La suite (u_n) est arithmétique de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.
   (a) Déterminer r et u_0.
   (b) Calculer $S = u_{50} + u_{51} + \ldots + u_{100}$.

EXERCICE 9.3.
On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = -2$.
1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Calculer u_{20}.
3. Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{20}$.

EXERCICE 9.4.
1. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$. On sait que $u_8 = -1$. Que vaut u_0 ?
2. La suite (u_n) est géométrique de raison q. On sait que $u_4 = 10$ et $u_6 = 20$.
   (a) Déterminer q et u_0.
   (b) Calculer $S = u_{50} + u_{51} + \ldots + u_{100}$.

EXERCICE 9.5.
On dit qu'un capital produit :
- *des **intérêts simples** si les intérêts sont uniquement calculés sur ce capital ;*
- *des **intérêts composés** si à la fin de chaque période, les intérêts générés sont ajoutés au capital pour produire de nouveaux intérêts.*

Alexandre dispose de 4 000 € qu'il souhaite placer à la banque. Celle-ci lui propose deux placements :
- un placement A à intérêts simples à un taux de 5 % par an ;
- un placement B à intérêts composés à un taux de 4 % par an.

1. On appelle A_n le montant du capital obtenu après n années avec le placement A.
   (a) Déterminer A_0, A_1, A_2 et A_3.
   (b) Montrer que (A_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (c) Exprimer A_n en fonction de n.
2. On appelle B_n le montant du capital obtenu après n années avec le placement B.
   (a) Déterminer B_0, B_1, B_2 et B_3.
   (b) Montrer que (B_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (c) Exprimer B_n en fonction de n.
3. Alexandre a entendu dire que les placements à intérêts composés étaient plus intéressants que les placements à intérêts simples.
   (a) À l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs de A_n et B_n jusqu'à $n = 20$.
   (b) Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 9.6.
On reprend ici la suite de l'exercice 6.5 du chapitre 6.
Un fournisseur fait une étude sur la fidélité de sa clientèle depuis l'année $n = 0$, où il y a eu 200 clients. Chaque année, sa clientèle est composée de 50% des clients de l'année précédente auxquels s'ajoutent 400 nouveaux clients.

1. Soit u_n le nombre de clients l'année n. Justifier que $u_{n+1} = 0,5u_n + 400$, puis calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 800$.
   (a) Vérifier que $v_{n+1} = 0,5v_n$.
   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   (c) En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de n.
   (d) Déterminer u_{10}, u_{20}, u_{50}.
   Que peut-on conjecturer concernant le nombre de clients du fournisseur ?

EXERCICE 9.7.
Un étudiant souhaite s'acheter une super collection de CD d'une valeur de 1 000 €. Pour économiser une telle somme, il ouvre un compte épargne à la banque qui rapporte 0,25 % mensuellement. À l'ouverture, il dépose 100 € le premier d'un mois, et ensuite 50 € le 1er de chaque mois. On pose $c_0 = 100$ et on note c_n le capital le premier de chaque mois après le versement initial.

1. Calculer les capitaux c_1, c_2 et c_3 du premier, deuxième et troisième mois.
2. Montrer que (c_n) vérifie une relation de récurrence de la forme $c_{n+1} = ac_n+b$, où a et b sont des réels à déterminer.
3. On pose $u_n = c_n + 20000$.
   (a) Montrer que cette suite est géométrique. (b) En déduire c_n puis u_n en fonction de n.
4. Montrer que (c_n) est croissante.
5. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre de mois nécessaires pour l'achat de la collection.

EXERCICE 9.8.
On reprend ici la suite de l'exercice 6.7 du chapitre 6.
On donne la suite : $(w_n) : \begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = \frac{2w_n+3}{w_n+4} \end{cases}$
On pose $v_n = \frac{w_n-1}{w_n+3}$

1. Montrer que (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
2. Donner l'expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
4. En déduire la valeur exacte de w_{20}.

EXERCICE 9.9.
On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = \frac{3\times 2^n-4n+3}{2}$ et $v_n = \frac{3\times 2^n+4n-3}{2}$

1. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.
2. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique.
3. Exprimer la somme suivante en fonction de n : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

Chapitre 10

Probabilités

Sommaire

10.1 Activités

ACTIVITÉ 10.1 (Loi des grands nombres)**.**
On rappelle que la fonction *random* (de la calculatrice ou d'Algobox) donne un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0;1[$ et que la fonction $E(x)$ (*int* sur la calculatrice, *floor* sur Algobox) est la fonction qui donne la *partie entière* de x (le plus grand entier n inférieur à x).

1. Compléter :

$$\begin{array}{lclclclccl}
\ldots\ldots & \leqslant & random & & & < & \ldots\ldots & \text{donc} & random & \in & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \leqslant & 6\times random & & & < & \ldots\ldots & \text{donc} & 6\times random & \in & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \leqslant & E(6\times random) & \leqslant & \ldots\ldots & < & \ldots\ldots & \text{donc} & E(6\times random) & \in & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \leqslant & E(6\times random)+1 & \leqslant & \ldots\ldots & & & \text{donc} & E(6\times random)+1 & \in & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

2. Que fait l'algorithme suivant ?

```
VARIABLES
  d : nombre
DEBUT
  d prend la valeur E(6*random)+1
  Afficher d
FIN
```

3. (a) Écrire un algorithme simulant le lancer d'un dé à six faces et renvoyant le résultat de ce dé.
   (b) Le modifier pour qu'il renvoie 10 fois ce résultat.
   (c) Le modifier pour qu'il renvoie n fois le résultat, n étant un nombre entier supérieur à 1 saisi par l'utilisateur de l'algorithme.
   (d) Le modifier pour qu'il affiche l'effectif d'apparition du résultat 4 pour n lancers de dés, n étant un nombre entier supérieur à 1 saisi par l'utilisateur de l'algorithme (*on pourra laisser l'affichage de tous les résultats pour vérifier si l'algorithme fonctionne comme il le doit*).

(e) Le modifier pour qu'il affiche la fréquence d'apparition du résultat 4 pour n lancers de dés, n étant un nombre entier supérieur à 1 saisi par l'utilisateur de l'algorithme (*on pourra laisser l'affichage de tous les résultats pour vérifier si l'algorithme fonctionne comme il le doit*).

(f) Le modifier pour qu'il affiche la fréquence d'apparition d'un résultat quelconque saisi par l'utilisateur pour n lancers de dés, n étant un nombre entier supérieur à 1 saisi par l'utilisateur de l'algorithme.

(g) Le modifier pour qu'il affiche le point ayant :
- pour abscisse le nombre de lancers déjà réalisés (donc le minimum des abscisses sera 0 et le maximum n) ;
- pour ordonnée la fréquence actuelle du résultat (donc le minimum des ordonnées sera 0 et le maximum 1).

4. À l'aide de l'algorithme précédent :
   (a) Effectuer 10000 lancers pour tous les résultats possibles.
   (b) Que constate-t-on ?
   (c) Compléter le tableau ci-dessous :

Résultat	1	2	3	4	5	6
Fréquence limite						

   (d) Comment expliquer ce résultat ?

5. (a) Modifier l'algorithme précédent pour qu'il fasse la même chose, non plus avec le résultat d'un lancer de dé, mais avec la somme de deux dés.
   (b) À l'aide de l'algorithme précédent :
      i. Effectuer 10000 lancers pour toutes les sommes possibles.
      ii. Que constate-t-on ?
      iii. Compléter le tableau ci-dessous :

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence limite											

      iv. Comment expliquer ce résultat ?

ACTIVITÉ 10.2 (Loi de probabilité numérique)**.**
Une roue dans une fête foraine est partagée en 8 secteurs égaux : 1 de couleur rouge, 3 de couleur verte et 4 de couleur bleue. On tourne la roue et celle-ci s'arrête de façon équiprobable sur l'un des 8 secteurs.

Situation A

1. Décrire l'univers Ω de cette expérience aléatoire.
2. Décrire la loi de probabilité p sur l'univers Ω.

Remarque. (rappel) Quand il n'y a pas de risque de confusion on peut noter $p(\omega_i)$ au lieu de $p(\{\omega_i\})$

Situation B Le jeu se déroule en fait de la manière suivante : si un joueur désire jouer, il doit miser 1 € et il gagne une somme dépendant de la couleur obtenue :
- aucun euro si la roue s'arrête sur un secteur bleu ;
- un euro si la roue s'arrête sur un secteur vert ;
- trois euros si la roue s'arrête sur le secteur rouge.

On s'intéresse pour la suite uniquement au gain final obtenu par le joueur, c'est-à-dire le gain associé à la couleur moins la mise pour pouvoir jouer.

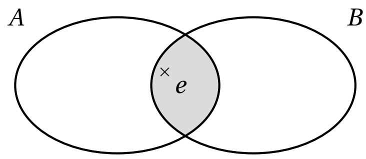
1. Décrire l'univers Ω' de cette nouvelle expérience aléatoire.
2. Décrire la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire (*on donnera le résultat sous forme de tableau*).
3. Si le joueur joue un grand nombre de fois à ce jeu, par exemple 10 000 fois :
   (a) quel effectif pour chacun des gains peut-on espérer ?
   (b) quel fréquence pour chacun des gains peut-on espérer ?
   (c) quel gain total peut-on espérer sur les 10 000 parties ?
   (d) quelle moyenne par partie peut-on espérer ?
   Vérifier que cette moyenne est égale à $\sum p_i\omega_i = p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + \ldots + p_n\omega_n$ où les ω_i sont les différents gains possibles et les p_i les probabilités respectives des événements $\{\omega_i\}$.

Cette « moyenne » sera appelée espérance *de la loi de probabilité.*

10.2 Rappels de Seconde

10.2.1 Vocabulaire des ensembles

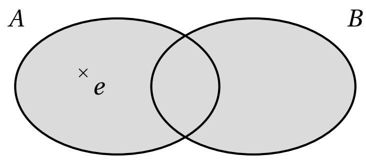
Définition 10.1 (Intersection)**.** L'*intersection* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B. On la note $A \cap B$.



Ainsi $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ **et** $e \in B$.

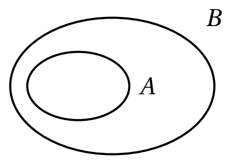
Remarque. Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Définition 10.2 (Réunion)**.** La *réunion* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B. On la note $A \cup B$.



Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ **ou** $e \in B$.

Définition 10.3 (Inclusion)**.** On dit qu'un ensemble A est *inclus* dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B. On note alors $A \subset B$.



On dit alors que A est une *partie* de B ou que A est un *sous-ensemble* de B.

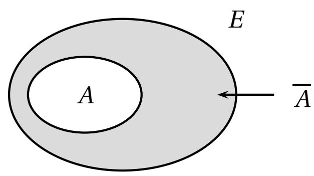
Remarque. $\varnothing$ et E sont toujours des parties de E (partie vide et partie pleine).

On notera $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Exemples. On a toujours :

- $A \subset A \cup B$;
- $B \subset A \cup B$;
- $A \cap B \subset A$;
- $A \cap B \subset B$;
- $A \cap B \subset A \cup B$;
- $\varnothing \subset A$;
- $\varnothing \cap A = \varnothing$;
- $\varnothing \cup A = A$.

Définition 10.4 (Complémentaire)**.** Soit E un ensemble et A une partie de E. Le *complémentaire* de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $\overline{A}$.



Remarque. $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Définition 10.5 (Cardinal)**.** Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé *cardinal de E*. Ce nombre est noté $\text{Card}(E)$. On convient que $\text{Card}(\varnothing) = 0$.

Exemple. Si $E = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$ alors $\text{Card}(E) = 6$.

Remarque. La notion de cardinal ne s'applique pas aux ensembles infinis (comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.).

10.2.2 Expériences aléatoires

Issues, univers

Définition 10.6. L'ensemble de toutes les *issues* d'une *expérience aléatoire* est appelé *univers* (ou univers des possibles). On note généralement cet ensemble Ω.

À notre niveau, Ω sera toujours un ensemble fini.

Exemples.
- On lance un dé et on regarde la face obtenue : $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$
- On lance un dé et on regarde si le numéro de la face obtenue est pair ou impair : $\Omega = \{P\,;I\}$
- On lance une pièce de monnaie : $\Omega = \{P\,;F\}$

- On lance deux fois de suite une pièce de monnaie : $\Omega = \{PP\,;\,PF\,;\,FP\,;\,FF\}$
- On lance deux fois de suite un dé : $\Omega = \{(i\,;\,j)$ où $1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6\}$

Remarquons qu'une même expérience peut déboucher sur des univers différents suivant les hypothèses faites : par exemple, si on lance deux dés et qu'on fait le produit P ou la somme S des deux chiffres obtenus, on obtient respectivement :

- $\Omega_P = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,8\,;\,9\,;\,10\,;\,12\,;\,15\,;\,16\,;\,18\,;\,20\,;\,24\,;\,25\,;\,30\,;\,36\}$;
- $\Omega_S = \{2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\,;\,9\,;\,10\,;\,11\,;\,12\}$.

Événements

Exemple : on lance deux dés et on considère la somme S obtenue. L'ensemble de toutes les issues possibles (univers) est $\Omega = \{2\,;\,3\,;\,\cdots\,;\,11\,;\,12\}$.

Le tableau 10.1 de la présente page définit le vocabulaire relatif aux *événements* (en probabilité) :

TABLE 10.1 – Vocabulaire relatif aux événements en probabilité

Vocabulaire	Signification	Illustration
Événement élémentaire (noté ω)	L'une des issues de la situation étudiée (partie de Ω ne contenant qu'un seul élément)	Obtenir 7 : $\omega = \{7\}$
Événement (notation quelconque)	Ensemble de plusieurs issues (partie de Ω)	Obtenir un nombre pair : $A = \{2\,;\,4\,;\,6\,;\,8\,;\,10\,;\,12\}$ Obtenir un multiple de trois : $B = \{3\,;\,6\,;\,9\,;\,12\}$ Obtenir une somme supérieure à 10 : $C = \{10\,;\,11\,;\,12\}$ Obtenir une somme inférieure à 6 : $D = \{2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$
Événement impossible (noté $\varnothing$)	C'est un événement qui ne peut pas se produire (partie vide de Ω)	« Obtenir 13 » est un événement impossible.
Événement certain (noté Ω)	C'est un événement qui se produira obligatoirement (partie de Ω égale à Ω)	« Obtenir entre 2 et 12 » est un événement certain.
Événement « A et B » (noté $A \cap B$)	Événement constitué des issues communes aux 2 événements (intersection de deux parties de Ω)	$A \cap B = \{6\,;\,12\}$
Événement « A ou B » (noté $A \cup B$)	Événement constitué de toutes les issues des deux événements (réunion de deux parties de Ω)	$A \cup B = \{2\,;\,3\,;\,4\,;\,6\,;\,8\,;\,9\,;\,10\,;\,12\}$
Événements incompatibles (on note alors $A \cap B = \varnothing$)	Ce sont des événements qui n'ont pas d'éléments en commun (parties disjointes de Ω, c'est-à-dire dont l'intersection est vide)	$C \cap D = \varnothing$ donc C et D sont incompatibles. Par contre, A et B ne le sont pas.
Événements contraires (l'événement contraire de A se note $\overline{A}$)	Ce sont deux événements incompatibles dont la réunion forme la totalité des issues (parties de Ω disjointes dont la réunion est égale à Ω)	Ici, $\overline{A}$ représente l'événement « obtenir une somme impaire ». On a alors : • $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (ensembles disjoints) • $A \cup \overline{A} = \Omega$

10.2.3 Loi de probabilité sur un univers Ω

Cas général

Définition 10.7. Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.
Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer, à chaque événement élémentaire w_i, des nombres $p_i \in [0; 1]$, appelés *probabilités*, tels que :
- $\sum\limits_i p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$;
- la probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités p_i des événements élémentaires ω_i qui constituent A.

Remarque. On note aussi : $p_i = p(\{\omega_i\}) = p(\omega_i)$.

Décrire la loi de probabilité revient à indiquer, pour chaque événement élémentaire, sa probabilité. On la présente généralement sous forme de tableau.

Exemple. Soit un dé truqué dont les probabilités d'apparitions des faces sont données par le tableau suivant :

Issue ω	1	2	3	4	5	6
Probabilité $p(\omega)$	0,05	0,05	0,1	0,1	0,2	inconnue

1. Calculer la probabilité de l'événement A = « obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».
   D'après la définition, $p(A) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 0,3$ [1].
2. Calculer la probabilité d'obtenir 6 :
   D'après la définition, $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$, donc $p(6) = 0,5$.

Propriété 10.1. *Soit A et B deux événements de Ω, alors :*
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$;
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Remarque. Comme, par définition, la probabilité de l'événement certain est 1 alors la probabilité de l'événement impossible, qui est son contraire, est 0.

Cas particulier : l'équiprobabilité

Définition 10.8. Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité* ou que la loi de probabilité est *équirépartie*.

Dans ce cas, la règle de calcul de la probabilité d'un événement A est la suivante :

Propriété 10.2. *Dans une situation d'équiprobabilité sur un univers Ω, pour tout événement élémentaire ω et tout événement A on a :*
- $p(\omega) = \dfrac{1}{Card(\Omega)}$
- $p(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}} = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Certaines expériences ne sont pas des situations d'équiprobabilité, mais on peut parfois s'y ramener tout de même.

Exemple. On lance deux dés équilibrés et on s'intéresse à la somme des deux dés.
L'univers est $\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ mais il n'y a pas équiprobabilité car chaque événement n'a pas la même probabilité. Ainsi il est plus difficile d'obtenir 2 que 7.
On se ramène à une situtation d'équiprobabilité : chaque dé étant équilibré, on a équiprobabilité sur chaque dé (chaque face à une probabilité de $\frac{1}{6}$).
Il reste à déterminer la façon d'obtenir chaque somme. Le tableau ci-dessous résume les possibilités pour chaque dé et la somme obtenue :

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

1. La notation rigoureuse est $p(\{1\})$ mais on peut noter $p(1)$ quand il n'y a pas de risque de confusion.

Chaque « case » étant équiprobable $\left(\frac{1}{36}\right)$ on obtient :

ω_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

10.3 Loi des grands nombres

Définition 10.9. Lorsque qu'on répète une expérience aléatoire, on appelle *fréquence d'apparition* d'une éventualité ω donnée le nombre : $f_i = \dfrac{\text{nombre de fois où l'éventualité } \omega \text{ apparaît}}{\text{nombre de fois où l'expérience est répétée}}$

On constate que si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience donnée, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser. Ce constat est un résultat mathématique appelé *La loi des grands nombres* ; il se démontre, mais la démonstration est largement hors de nos compétences :

Théorème 10.3 (Loi des grands nombres)**.** *Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand.*

Remarques.
- Dans certains cas, on utilise ce résultat pour valider ou rejeter un modèle (une loi de probabilité) choisi à priori.
- Dans d'autres cas, lorsqu'on ne connaît pas de loi de propabibilité relativement à une expérience aléatoire, on peut ainsi en introduire une à partir des fréquences déterminées lors d'un grand nombre d'expériences

10.4 Loi de probabilité numérique

Définition 10.10. Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_n\}$ un univers associé à une expérience aléatoire sur lequel a été définie une loi de probabilité.
Si, pour tout i, ω_i est un réel alors la loi de probabilité est dite *numérique*.

Exemple 10.1. Dans l'activité, la loi de probabilité de la situation A n'est pas numérique, car les issues de cette expérience sont des couleurs, celle de la situation B est numérique car les issues sont des réels.

Définition 10.11. Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_n\}$ un univers associé à une expérience aléatoire sur lequel a été définie une loi de probabilité qui est numérique.
On définit alors l'espérance mathématique, E, la variance, V, et l'écart type σ, de la loi de probabilité numérique de la façon suivante :

$$E = \sum_{i=1}^{n} p_i\omega_i \qquad V = \sum_{i=1}^{n} p_i(\omega_i - E)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\omega_i^2\right) - E^2 \qquad \sigma = \sqrt{V}$$

où ω_i sont les éventualités et p_i les probabilités respectives des $\{\omega_i\}$.

10.5 Exercices

10.5.1 Rappels

Exercice 10.1.
On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au numéro apparaissant sur la face supérieure.

1. Décrire l'ensemble Ω, univers associé à cette expérience aléatoire.
2. Écrire sous forme de partie (d'ensemble) de Ω les événements :
   - A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 » ;
   - B : « obtenir un numéro impair » ;
   - C : « obtenir un numéro strictement supérieur à 4 ».
3. Pour chacun des événements suivants, les écrire sous forme de partie de Ω et les décrire par une phrase la plus simple possible.
   - $A \cup B$;
   - $A \cap B$;
   - $A \cup C$;
   - $A \cap C$;
   - $C \cup B$;
   - $C \cap B$;
   - $\overline{A}$;
   - $\overline{A} \cup C$;
   - $\overline{A} \cap C$;

EXERCICE 10.2.
On choisit au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il d'issues possibles ?
2. On considère les événements :
   - A : « obtenir un as » ;
   - P : « obtenir un pique ».

   (a) Combien y a-t-il d'éventualités dans A ?
   (b) Combien y a-t-il d'éventualités dans P ?
   (c) Traduire par une phrase les événements $A \cap P$ et $A \cup P$.
   (d) Déterminer Card$(A \cap P)$ et Card$(A \cup P)$.

EXERCICE 10.3.
E est l'ensemble des nombres de 1 à 20 inclus. On choisit au hasard l'un de ces nombres.

1. Quelle est la probabilité des événements suivants :
   - A : « il est un multiple de 2 »
   - B : « il est un multiple de 4 »
   - C : « il est un multiple de 5 »
   - D : « il est un multiple de 2 mais pas de 4 »
2. Calculer la probabilité de :
   - $A \cap B$;
   - $A \cup B$;
   - $A \cap C$;
   - $A \cup C$.

EXERCICE 10.4.
On considère un jeu de 32 cartes (la composition d'un jeu de 32 cartes est la suivante : 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; valet ; dame ; roi ; as pour chacune des 4 « couleurs » : coeur ; carreau ; trèfle et pique.)
On tire, au hasard, une carte du paquet, chaque carte ayant autant de chance d'être choisie. On considère les événements suivants :

- V : « Obtenir un valet » ;
- F : « Obtenir une figure [2] » ;
- T : « Obtenir un trèfle ».

1. Calculer les probabilités $p(V)$, $p(F)$ et $p(T)$.
2. Décrire l'événement $F \cap T$ puis calculer sa probabilité $p(F \cap T)$.
   En déduire la probabilité $p(F \cup T)$ d'obtenir une figure ou un trèfle.
3. Décrire l'événement F et calculer (simplement !) sa probabilité $p(F)$.

EXERCICE 10.5.
Les fiches de tous les élèves, indiquant leur filière et leur sexe, sont rangées dans un armoire et on prend au hasard dans cette armoire une fiche.

Les données du tableau ci-contre sont celles de l'année scolaire pour les Premières générales à Dupuy de Lôme pour l'année scolaire 2004–2005 :

	1 ES	1 S	1 L	Total
Filles	76	92	50	218
Garçons	43	76	13	132
Total	119	168	63	350

1. Déterminer les probabilités des évènements suivants :
   - A : La fiche est celle d'une fille ;
   - B : La fiche est celle d'un élève en 1S ;
   - C : La fiche est celle d'un garçon et d'un élève en 1L ;
   - D : La fiche est celle d'une fille ou d'un élève en 1ES.
2. Décrire avec une phrase les évènements suivant puis donner leur probabilité :
   - $\overline{A}$;
   - $A \cap B$;
   - $A \cup B$.

EXERCICE 10.6.
Deux lignes téléphoniques arrivent à un standard. On note :

- A : « la première ligne est libre » ;
- B : « la seconde ligne est libre ».

Après étude statistique, on admet les probabilités :

- $p(A) = 0,4$;
- $p(B) = 0,5$;
- $p(A \cap B) = 0,3$.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- F : « la ligne A est occupée » ;
- G : « une ligne au moins est libre » ;
- H : « une ligne au moins est occupée » ;
- I : « aucune ligne n'est libre ».

EXERCICE 10.7.
Un dé (à 6 faces) est truqué de la façon suivante : chaque chiffre pair a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair. Calculer la probabilité d'obtenir un 6.

2. Les figures sont les valets, les dames et les rois

EXERCICE 10.8.
Un couple de futurs parents décide d'avoir trois enfants. On fait l'hypothèse qu'ils auront, à chaque fois, autant de chances d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux. Calculer la probabilité des événements :

- A : « ils auront trois filles » ;
- B : « ils auront trois enfants de même sexe » ;
- C : « ils auront au plus une fille » ;
- D : « les trois enfants seront de sexes différents ».

EXERCICE 10.9.
Un sac contient quatre jetons rouges et trois jetons verts. On tire des jetons, avec remise après tirage, jusqu'à obtention d'un jeton de même couleur qu'un des jetons précédemment tirés. Calculer la probabilité que les deux jetons de même couleur soient bleus.

10.5.2 Lois numériques

EXERCICE 10.10.
On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on associe à chaque tirage le nombre :

- -10 si on tire le numéro 1 ;
- 10 si on tire le numéro 6 ;
- 0 dans tous les autres cas.

1. Définir l'univers Ω associé à l'expérience aléatoire.
2. On suppose que le dé est parfaitement équilibré. Donner la loi de probabilité.
3. Calculer l'espérance et l'écart-type de cette expérience aléatoire.

EXERCICE 10.11.
Deux roues de fête foraine sont disponibles, chacune comportant des secteurs identiques et équiprobables.

La roue A est conçue de la manière suivante :
- 1 secteur rapporte 6 € (mise comprise) ;
- 6 secteurs rapportent 0 € ;
- 1 secteur rapporte -6 €.

La roue B est conçue de la manière suivante :
- 1 secteur rapporte 4 € ;
- 1 secteur rapportent 0 € ;
- 4 secteurs rapportent -1 €.

1. Décrire les lois de probabilités pour chacune des roues.
2. Déterminer leurs espérances respectives et les comparer.
3. Déterminer leurs écarts-types respectifs et les comparer.
4. Résumer les différences entre ces deux roues.

EXERCICE 10.12.
On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note la différence (en valeur absolue) entre ces deux dés.

1. Définir la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.
2. Calculer l'espérance et l'écart-type de cette expérience aléatoire.

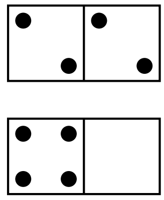
EXERCICE 10.13.
On jette trois fois de suite, de manière totalement indépendante une pièce de monnaie parfaitement équilibrée et on appelle « tirage » le résultat obtenu. Ainsi (Face ; Face ; Pile) est un tirage (qu'on notera FFP).

1. Faire un arbre décrivant l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire et donner le cardinal de Ω, l'univers des possibles.
2. On appelle X le nombre de « Pile »obtenues à chaque tirage.
   (a) Décrire Ω', l'univers des possibles pour X.
   (b) Déterminer la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
   (c) Déterminer E et σ respectivement l'espérance et l'écart type de cette loi.

EXERCICE 10.14.
Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores. On suppose que les feux fonctionnent de manière indépendante, que l'automobiliste passe quand le feu est vert et s'arrête sinon. On suppose de plus que chaque feu est vert les deux tiers du temps. Enfin on dit que l'automobiliste a eu le feu au vert quand il n'a pas eu à s'arrêter à ce feu.

1. Faire un arbre représentant toutes les situations possibles.
2. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait :
   (a) les trois feux au vert ?
   (b) deux des trois feux au vert ?
   (c) au moins un des feux au vert ?
   (d) à s'arrêter au plus une fois ?
3. On note X le nombre de feux verts obtenus.
   (a) Décrire la loi de probabilité de X.
   (b) Déterminer l'espérance de cette loi.

EXERCICE 10.15 (La Réunion juin 2 007)**.**
Un domino est une petite plaque partagée en deux parties. Sur chacune des parties figure une série de points. Il peut y avoir de zéro à six points dans une série. Un jeu de dominos comporte 28 dominos, tous différents.



Lors d'une fête, on propose le jeu suivant :
- le joueur tire au hasard un domino parmi les 28 dominos du jeu,
- il gagne, en euros, la somme des points figurant sur le domino tiré.

On suppose que tous les dominos du jeu ont la même probabilité d'être tirés.

1. Établir la loi de probabilité des gains possibles.
2. Le joueur doit miser 7 € avant de tirer un domino. En se fondant sur le calcul des probabilités, peut-il espérer récupérer ses mises à l'issue d'un grand nombre de parties ?

EXERCICE 10.16.
On considère une roue partagée en 15 secteurs égaux tels que :
- il y a un secteur de couleur rouge (R)
- il y a cinq secteurs de couleur bleue (B)
- il y a neuf secteurs de couleur verte (V)

La roue tourne sur son axe central et s'arrête sur l'une des couleurs, chaque secteur ayant la même probabilité.
Pour pouvoir faire tourner la roue, un joueur doit payer 1 € et, selon la couleur sur laquelle elle s'arrête, il gagne :
- 0 € si le vert sort ;
- 1 € si le bleu sort ;
- x € si le rouge sort ;

On appelle X le gain final (gain − mise de départ) du joueur.

1. Décrire l'univers Ω associé à X.
2. Décrire la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
3. Exprimer en fonction de x l'espérance de gain du joueur.
4. On suppose que $x = 2$ €.
   (a) Quelle est l'espérance de gain du joueur ?
   (b) Qui est le plus avantagé : l'organisateur du jeu ou le joueur ?
5. Mêmes questions pour $x = 15$ €.
6. On dit que le jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est égale à zéro, car alors ni l'organisateur du jeu ni le joueur ne sont avantagés. Combien doit valoir x pour que le jeu soit équitable ?

EXERCICE 10.17 (D'après Liban juin 2 007)**.**
Les places d'une salle de cinéma sont toutes occupées. Le film proposé est une rediffusion d'une comédie à grand succès. À la fin de la projection, on interroge au hasard une personne sortant de la salle.
On appelle V l'événement : « la personne interrogée avait déjà vu le film avant cette projection ».
On donne : la probabilité que l'événement V soit réalisé est égale à $0,345$.

1. On interroge au hasard et successivement quatre personnes sortant de la salle. On suppose que le nombre de spectateurs est suffisamment grand pour assimiler l'interrogation au hasard d'un spectateur à un tirage avec remise. Quelle est la probabilité arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins une personne ait déjà vu le film avant cette projection ?
2. À la fin de l'année, une étude nationale a été réalisée sur le nombre de fois qu'un spectateur sortant de la salle est allé voir ce film. Le tableau ci-dessous, pour lequel il manque une valeur notée q représente la loi de probabilité du nombre de fois que le spectateur est allé voir ce film.

Nombre de fois	1	2	3	4	5	6
probabilité	0,55	0,15	0,15	0,05	q	0,05

   (a) Déterminer q.

   (b) En déduire l'espérance mathématique, arrondie à l'unité de cette loi de probabilité et interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 10.18 (Polynésie septembre 2 006)**.**
On suppose qu'un indice, calculé quotidiennement, n'évolue d'un jour à l'autre que de trois façons possibles soit il diminue de 10 %, soit il est stable, soit il augmente de 10 %. On note $i_0 = 100$ l'indice de départ et i_n l'indice au bout de n jours.

1. (a) Si pendant dix jours consécutifs il y avait trois jours de hausse, puis quatre jours de stabilité, puis trois jours de baisse, quel serait, arrondi au centième, l'indice final i_{10} ?
   Quelle serait l'évolution en pourcentage par rapport à i_0 ?

   (b) On suppose que l'indice augmente tous les jours. Montrer que la suite (i_n) des indices est une suite géométrique, dont on précisera le terme initial et la raison.
   Dans ce cas déterminer au bout de combien de jours cet indice dépassera la valeur 1 000.
2. Une étude a montré que, chaque jour, l'indice augmente de 10 % avec une probabilité égale à 0,3, diminue de 10 % avec une probabilité égale à 0,2 et reste stable avec une probabilité égale à 0,5.
   L'évolution d'un jour à l'autre est indépendante de l'évolution des jours précédents.
   On s'intéresse maintenant à l'évolution de cet indice sur deux jours. On note X la valeur de l'indice i_2 au bout de deux jours.

   (a) Construire un arbre de probabilités illustrant l'évolution de cet indice sur deux jours.

   (b) Recopier et compléter le tableau suivant, donnant la loi de probabilité de X où les x_i sont les valeurs possibles de X et p_i la probabilité que X soit égale à x_i.

x_i	81	90		100	110	121
p_i		0,2	0,12	0,25		

   (c) Calculer l'espérance mathématique de X.

Devoir surveillé n°9

Suites – Probabilités

EXERCICE 9.1 (5 points)**.**
Un magasin fait une étude sur les modes de paiement des clients et les montants m des achats (en euros) et obtient les résultats suivants :

	Carte bancaire	Espèces	Chèque	Total
$m < 10$	18	12	0	30
$10 \leqslant m \leqslant 20$	18	8	7	33
$m > 20$	30	0	7	37
Total	66	20	14	100

Une caissière enregistre un achat.

1. Déterminer, sans justifier, les probabilités des évènements suivants :
   - A : « C'est un achat d'un montant strictement supérieur à 20 € » ;
   - B : « C'est un achat payé par carte bancaire » ;
   - C : « C'est un achat d'un montant compris en 10 € et 20 € et payé en espèces » ;
   - D : « C'est un achat payé par chèque ou d'un montant compris en 10 € et 20 € ».
2. Décrire avec une phrase les évènements suivant puis donner leur probabilité :
   - $\overline{A}$;
   - $A \cap B$;
   - $A \cup B$.

EXERCICE 9.2 (7,5 points)**.**
Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : 3 de couleur noire et 2 de couleur blanche. Le joueur tire une première boule au hasard, note sa couleur, la remet dans l'urne, en tire une second boule et note sa couleur.

1. Faire un arbre décrivant toutes les issues possibles.
2. Déterminer les probabilités des évènements suivants :
   - A : « Les deux boules sont blanches » ;
   - B : « Les deux boules sont de la même couleur » ;
   - C : « Il y a au moins une boule blanche » ;
   - D : « Il y a au plus une boule noire » ;
3. Pour pouvoir jouer à ce jeu, **le joueur doit miser 5 €** et il gagne :
   - 0 € s'il n'a tiré aucune boule blanche ;
   - 7 € s'il a tiré exactement une boule blanche ;
   - 10 € s'il a tiré deux boules blanches.

   On appelle gain final d'une partie ce qu'obtient le joueur après une partie, c'est-à-dire son gain **moins sa mise**.
   (a) Décrire l'univers de cette expérience aléatoire.
   (b) Donner la probabilité de chacun des évènements élémentaires (on pourra présenter sa réponse sous forme de tableau).
   (c) Déterminer l'espérance de cette expérience aléatoire. Interpréter ce résultat.
   (d) Le joueur a-t-il intérêt à jouer ?
   (e) **Question bonus à traiter après avoir fait tout le reste.**
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
   On dit que le jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est égale à zéro. Proposer une modification simple du jeu pour qu'il soit équitable.

EXERCICE 9.3 (7,5 points)**.**
Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail :
- *Premier contrat* : un loyer de 300 € pour le premier mois, puis une augmentation de 8 € par mois jusqu'à la fin du bail ;
- *Second contrat* : un loyer de 300 € pour le premier mois, puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.

Pour n variant de 0 à 35, on appelle
- u_n le loyer mensuel du mois n obtenu avec le premier contrat ;
- v_n le loyer mensuel du mois n obtenu avec le second contrat ;

On a donc $u_0 = v_0 = 300$ €.

1. **Étude du premier contrat.**
   (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Calculer u_{35}, le loyer du dernier mois.
   (d) Calculer la somme des loyers versés durant la durée des 36 mois avec le premier contrat.
2. **Étude du second contrat.**
   (a) Calculer v_1 et v_2.
   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) Calculer v_{35}, le loyer du dernier mois.
   (d) Calculer la somme des loyers versés durant la durée des 36 mois avec le second contrat.
3. Quel contrat doit choisir l'étudiant ?

Chapitre 11

Comportement asymptotique

Sommaire

11.1 Activités

ACTIVITÉ 11.1.
Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ et h, définie sur $[0\,;+\infty[$, par $h(x) = \sqrt{x}$.

1. Compléter le tableau suivant :

x	10	10^2	10^6	10^{10}
$f(x)$				
$g(x)$				
$h(x)$				

2. Comment semblent se comporter ces trois fonctions quand x devient grand ?
3. Résoudre sur $[0\,;+\infty[$:
   - $f(x) > 10^{12}$
   - $f(x) > 10^{24}$
4. Faire de même pour g et h.

Finalement, on peut rendre $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre x suffisamment ....

On dira que leur limite, quand x tend vers $+\infty$, est $+\infty$ et on écrira : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ACTIVITÉ 11.2.
Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+2$.

1. (a) Compléter le tableau suivant :

x	10	10^2	10^6	10^{10}
$f(x)$				

   (b) Comment semble se comporter cette fonction quand x devient grand ?

   (c) Comment semble se comporter la courbe de cette fonction quand x devient grand ?
   On pourra s'aider d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur.

   Finalement, on peut rendre $f(x)$ aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre x suffisamment ....

   On dira que
   - la limite de f, quand x tend vers $+\infty$ est 2 et on écrira : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$;
   - la droite d'équation $y=2$ est une asymptote (horizontale) à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

2. (a) Compléter le tableau suivant :

x	$1,5$	$1,1$	$1,01$	$1,0001$
$f(x)$				

   (b) Comment semble se comporter cette fonction quand x se rapproche de 1 ?

   (c) Comment semble se comporter la courbe de cette fonction quand x se rapproche de 1 ?
   On pourra s'aider d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur.

   Finalement, on peut rendre $f(x)$ aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre x suffisamment ....

   On dira que
   - la limite de f, quand x tend vers 1 par valeurs supérieures à 1 est $+\infty$ et on écrira : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty$;
   - la droite d'équation $x=1$ est une asymptote (verticale) à la courbe $\mathscr{C}$ (forcément en 1).

11.2 Limite d'une fonction

11.2.1 En l'infini

Définition 11.1. Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle du type $[a\,;+\infty[$.
Lorsque x prend des valeurs *de plus en plus grandes en valeur absolue et positives*, on dit aussi *lorsque x tend vers $+\infty$*, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus :
- grands en valeur absolue et positifs (tendent vers $+\infty$), on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$;
- grands en valeur absolue et négatifs (tendent vers $-\infty$), on dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$;
- proches d'un réel l (tendent vers l), on dit que f a pour limite l en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

Remarques.
- Ces définitions sont, conformément au programme, très intuitives. Il en existe de plus rigoureuses, mais elles ne sont pas exigibles.
- On utilisera parfois dans la suite les termes de « limite infinie » quand la limite d'une fonction est $+\infty$ ou $-\infty$ et de « limite finie » quand la limite d'une fonction est un nombre l.

On a des définitions équivalentes en $-\infty$:

Définition 11.2. Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle du type $]-\infty\,;a]$.
Lorsque x tend vers $-\infty$, si les nombres $f(x)$:
- tendent vers $+\infty$, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$;
- tendent vers $-\infty$, on dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$;
- tendent vers un réel l, on dit que f a pour limite l en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$.

Exemples 11.1. La figure 11.1 page suivante présente quatre exemples où le lien entre la limite de la fonction et l'allure de la courbe est souligné, sur la courbe, par une flèche :

Exemple 11.2. Certaines fonctions n'ont pas de limite en l'infini. C'est le cas, par exemple, de la fonction $\sin x$ (voir sa courbe représentative sur la figure 11.2 page ci-contre).

FIGURE 11.1 – Quatre exemples de limites en l'infini

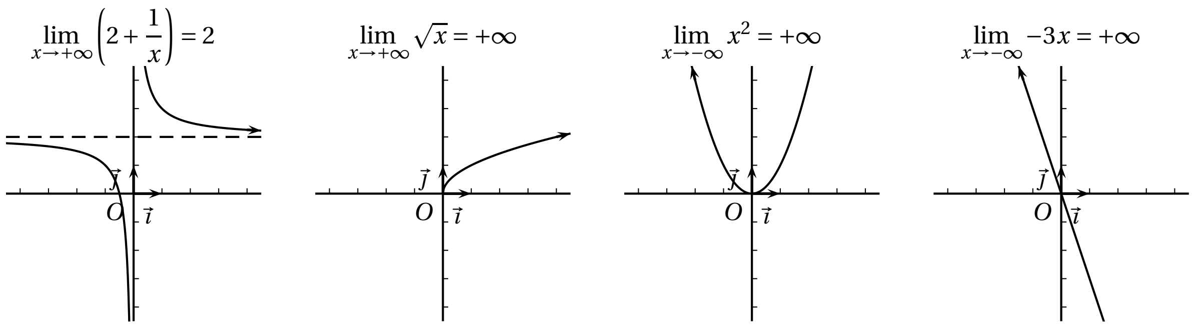
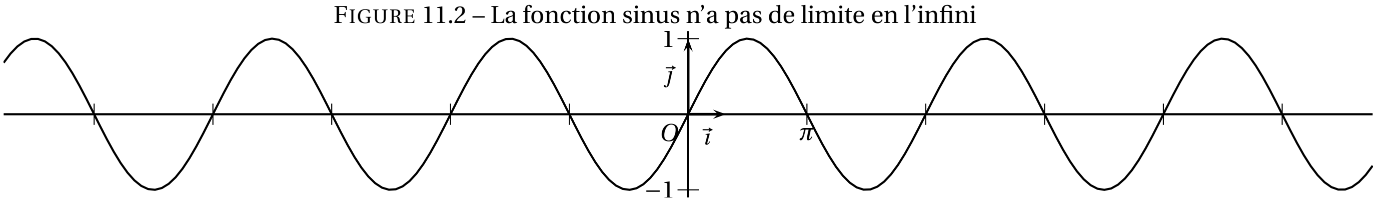


FIGURE 11.2 – La fonction sinus n'a pas de limite en l'infini



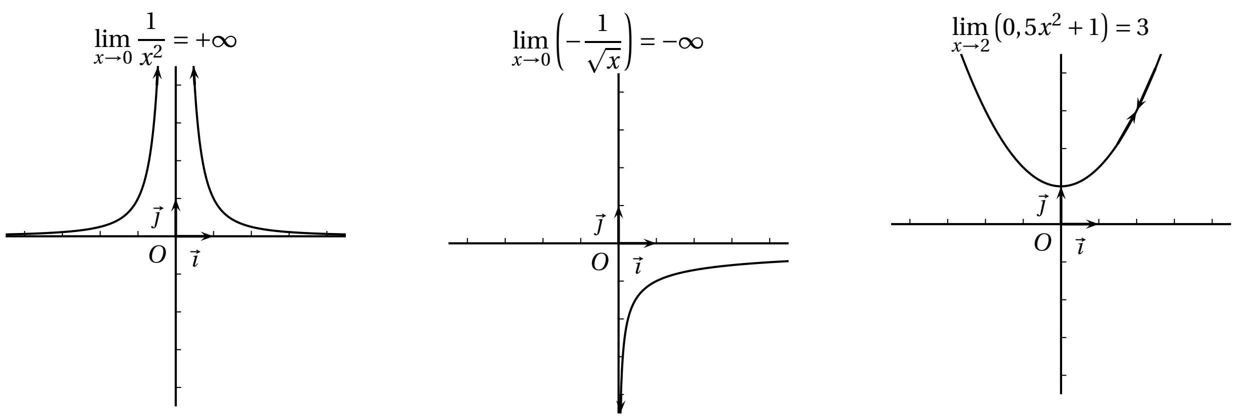
11.2.2 En un réel a

Définition 11.3. Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant a ou tel que a soit une borne de D.
Lorsque x tend vers a, si les nombres $f(x)$:

- tendent vers $+\infty$, on dit que f a pour limite $+\infty$ en a et on note $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$;
- tendent vers $-\infty$, on dit que f a pour limite $-\infty$ en a et on note $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$;
- tendent vers un réel l, on dit que f a pour limite l en a et on note $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

Exemples 11.3. La figure 11.3 de la présente page présente trois exemples où le lien entre la limite de la fonction et l'allure de la courbe est souligné, sur la courbe, par une flèche.

FIGURE 11.3 – Limites en a



En un réel a, à droite ou à gauche

Certaines fonctions n'ont pas de limite en un réel a, au sens de la définition précédente. C'est le cas de la fonction inverse.
Lorsque x tend vers 0, les nombres $\frac{1}{x}$ tendent vers $+\infty$ quand x est positif, et vers $-\infty$ quand x est négatif. On parle alors de « limite à droite de 0 » et de « limite à gauche de 0 » (les x positifs et les x négatifs étant situés en général respectivement à droite de 0 et à gauche de 0 sur l'axe des abscisses).
On dit aussi que la limite de la fonction inverse en 0^+ (quand x tend vers 0 et est positif) est $+\infty$ et que la limite de la fonction inverse en 0^- (quand x tend vers 0 et est négatif) est $-\infty$.

On notera alors indifféremment : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Par abus de langage, on écrira « $x \to a^+$ » pour dire « x tend vers a et $x > a$ » et « $x \to a^-$ » pour dire « x tend vers a et $x < a$ ».

Finalement, ce n'est que lorsque la limite à droite et à gauche de a sont égales qu'on dit que f admet une limite en a, comme par exemple la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en 0. Lorsque les limites à gauche et à droite sont différentes, la fonction n'a pas de limite en a.

Ainsi, comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$, on peut écrire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$, la fonction inverse n'a pas de limite en 0.

11.3 Limite des fonctions usuelles

Propriété 11.1. *Soit f une des fonctions usuelles (affine, carré, cube, inverse, racine carrée, sinus et cosinus) et D_f leurs ensembles de définition respectifs.*

- *Si $a \in D_f$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$*
- *Sinon, aux bornes de leur ensemble de définition, les fonctions usuelles ont les limites résumées dans le tableau ci-dessous :*

f	D_f	Limites
$f(x) = mx+p$	$\mathbb{R}$	Si $m>0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = -\infty$ Si $m<0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = +\infty$ Si $m=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = \lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = p$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Les définitions rigoureuses des limites étant hors programme, les démonstrations de ces propriétés et des suivantes le sont aussi, mais les activités montrent comment elles peuvent se faire.

Remarques.
- Les fonctions constantes ($f(x) = k$) et linéaires ($f(x) = kx$) sont aussi des fonctions usuelles mais sont considérées comme des cas particuliers des fonctions affines $f(x) = mx+p$ avec, respectivement, $m = 0$ et $p = 0$.
- $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$ a les mêmes limites que $f(x) = x^2$ si n est pair et que $f(x) = x^3$ si n est impair (on l'admettra).
- $f(x) = \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$ a les mêmes limites que $f(x) = \frac{1}{x}$ si n est impair et que $f(x) = \frac{1}{x^2}$ si n est pair (on l'admettra).

11.4 Opérations sur les limites

Dans les paragraphes suivants, nous parlerons parfois de « forme indéterminée », notée F.I. Cela ne veut pas forcément dire qu'il n'y a pas de limite, mais que la règle énoncée ne permet pas de conclure dans le cas général, qu'il faut étudier chaque cas particulier.

11.4.1 Règle essentielle

On admettra que les sommes, les produits, les inverses, les quotients ou les composées des fonctions usuelles qui nous étudierons en première vérifient tous :

Si $a \in D_f$, où D_f est l'ensemble de définition de f, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Dans les autres cas, aux bornes de leur ensemble de définition, on appliquera les propriétés des paragraphes suivants.

11.4.2 Limite d'une somme

Propriété 11.2. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction somme $f+g$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*F.I.*
$-\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$-\infty$

On l'admettra.

Exemples 11.4. • $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\dfrac{1}{x}-1\right)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-1)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(-x+\dfrac{1}{x}-1\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(-x-1)=-0-1=-1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x-1\right)$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$. Nous verrons plus tard comment « lever l'indétermination ».

11.4.3 Limite d'un produit

Propriété 11.3. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction produit $f\times g$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l'\neq0$	$l'=0$	$\pm\infty$
$l\neq0$	$l\times l'$	0	$\pm\infty$
$l=0$	0	0	*F.I.*
$\pm\infty$	$\pm\infty$	*F.I.*	$\pm\infty$

On l'admettra.

Remarque. Le signe, lorsque la limite du produit est $\pm\infty$, est donné par la règle des signes des produits.

Exemples 11.5. • $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-5x^2\right)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(-5)=-5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}\left(x^2+x\right)$ est indéterminée car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(x^2+x\right)=0+0=0$. Nous verrons plus tard comment « lever l'indétermination ».

11.4.4 Limite de l'inverse

Propriété 11.4. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f une fonction ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction $\dfrac{1}{f}$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$l\neq0$	$l=0^+$	$l=0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{1}{f(x)}$	$\dfrac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0 (0^+)	0 (0^-)

On l'admettra.

Exemples 11.6. • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$ et $x^2>0$ quand $x\in\mathbb{R}^*$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^2+x+2} = \dfrac{1}{4}$ car $\lim\limits_{x\to 1} \left(x^2+x+2\right) = 4$

11.4.5 Limite d'un quotient

Propriété 11.5. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ / $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$l' \neq 0$	$l' = 0$	$\pm\infty$
$l \neq 0$	$\dfrac{l}{l'}$	$\pm\infty$	*0*
$l = 0$	*0*	*F.I.*	*0*
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	*F.I.*

Remarque. Le signe, lorsque la limite du quotient est $\pm\infty$, est donné par la règle des signes des produits (qui est aussi la règle des signes des quotients).

Preuve. $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$ or, d'après les limites de l'inverse,

- si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = l' \neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{l'}$;
- si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{g(x)} = \pm\infty$;
- si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \pm\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{g(x)} = 0$.

En appliquant les propriétés des limites d'un produit, on obtient :

$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l' \neq 0$	$l' = 0$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{g(x)}$ / $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\dfrac{1}{l'}\ (\neq 0)$	$\pm\infty$	0
$l \neq 0$	$l \times \dfrac{1}{l'} = \dfrac{l}{l'}$	$\pm\infty$	0
$l = 0$	0	F.I.	0
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.

◊

Exemple 11.7.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3}{2x^2+3} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} -3 = -3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^2+3) = +\infty$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\cos x}{x^2-2x} = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x^2-2x) = 0$ et $x^2-2x = x(x-2) < 0$ (négatif entre les racines 0 et 2)
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x}{x^3+x-1}$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-x\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3+x-1\right) = +\infty$

11.4.6 Cas des formes indéterminées

Finalement, il y a quatre cas d'indétermination qui sont, **en utilisant un abus d'écriture qui ne vous sera pas autorisé sur vos copies** :

$$\text{« } \frac{0}{0} \text{ »} \qquad \text{« } 0 \times \infty \text{ »} \qquad \text{« } \frac{\infty}{\infty} \text{ »} \qquad \text{« } \infty - \infty \text{ »}$$

Pour lever l'indétermination, on peut tenter transformer l'expression (par exemple développer s'il s'agit d'un produit). Si cela ne donne rien, il est toujours possible de mettre en facteur le terme de plus haut degré (les termes quand il s'agit d'un quotient) : cela résoud la plupart des problèmes.

Quelques exemples

1. Nous avons vu que $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x-1\right)$ était une forme indéterminée.

   Comme $x\to-\infty$, on peut considérer que $x\neq 0$, et donc écrire, en factorisant le terme de plus haut degré :
   $$x^2+x-1=x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$$
   or, comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$, on a :
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1+0+0=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+x-1\right)=+\infty$$

2. Nous avons vu que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}\left(x^2+x\right)$ est une forme indéterminée.

   Avec $x>0$, donc $x\neq0$, on peut écrire, en développant : $\dfrac{1}{x}\left(x^2+x\right)=x+1$

   or $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x+1)=0+1=1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}\left(x^2+x\right)=1$

3. Nous avons vu que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x}{x^3+x-1}$ est une forme indéterminée.
   Comme $x\to+\infty$ on peut considérer que $x\neq0$ et, en factorisant le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur, on obtient :
   $$\frac{x^2-x}{x^3+x-1}=\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{1-\frac{1}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}$$
   or, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$, on a :
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1-0=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=1+0-0=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x^3+x-1}=0$$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.
   En réduisant au même dénominateur, on obtient : $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$
   or
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x-1)=0-1=-1\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^2=0\text{ et }x^2>0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x-1}{x^2}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$

11.4.7 Fonctions polynôme et rationelle

On peut procèder de la même manière qu'aux exemples 1 et 3 du paragraphe précédent pour toute fonction polynôme ou rationelle et démontrer ainsi les propriétés suivantes :

Propriété 11.6. *Soit f une fonction polynôme de degré n :*
$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \text{ avec } a_n\neq0$$
Alors :
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}a_nx^n=\pm\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}a_nx^n=\pm\infty$.

qui s'énonce aussi de la façon suivante :

« La limite en l'infini d'une fonction polynôme est celle de son terme de plus haut degré. »

Propriété 11.7. *Soit f une fonction rationelle :*

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. Alors :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$.

Le détail de ces deux démonstrations est laissé en exercice au lecteur.

11.5 Asymptotes

Définition 11.4. On appelle courbe asymptote une courbe simple (droite, cercle, etc.) dont une courbe plus complexe peut s'approcher.

Nous ne parlerons au lycée que de droite asymptote, en omettant le plus souvent de préciser même le terme de droite. Une asymptote sera donc une droite dont la courbe représentative d'une fonction s'approche (sans forcément l'atteindre). Nous avons vu dans les activités les trois types d'asymptote.

11.5.1 Asymptote verticale

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f admet une limite infinie en un réel a.
On a alors :

Définition 11.5. Si f une fonction admet une limite infinie à gauche ou à droite de a, réel, on dit alors que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote (verticale) à la courbe de f.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \infty \text{ ou } \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \infty \Leftrightarrow x = a \text{ asymptote à } \mathscr{C}$$

Remarque. Il suffit qu'on ait soit une limite à droite, soit une limite à gauche qui vaut $\pm\infty$ pour avoir une asymptote verticale.

11.5.2 Asymptote horizontale

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f admet une limite finie en l'infini.
On a alors :

Définition 11.6. Si f une fonction admet une limite finie b en l'infini, on dit alors que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote (horizontale) à la courbe de f en l'infini.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \Leftrightarrow y = b \text{ asymptote à } \mathscr{C} \text{ en l'infini}$$

Remarque. Une courbe peut avoir une asymptote en $+\infty$ sans en avoir pour autant en $-\infty$: il faut faire l'étude aux deux bornes.

11.5.3 Asymptote oblique

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f se comporte de plus en plus comme une fonction affine.
On a alors :

Définition 11.7. Soit f une fonction. S'il existe une fonction affine $g(x) = mx + p$ telle que la fonction $f - g$ admet comme limite 0 en l'infini, on dit alors que la droite d'équation $y = mx + p$ est une asymptote (oblique) à la courbe de f en l'infini.

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - (mx + p)\big) = 0 \Leftrightarrow y = mx + p \text{ asymptote à} \mathscr{C} \text{ en l'infini}$$

Remarque. Même remarque que ci-dessus.

11.6 Exercices

11.6.1 Technique

EXERCICE 11.1.
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{1}{2}x^3\right)$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(x\sqrt{x}\right)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\dfrac{-6}{x^2}\right)$

EXERCICE 11.2.
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}+2x+3\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3\sqrt{x}+x^2\right)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{-5}{x}+x^2\right)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\dfrac{1}{x}+3x^2-2\right)$
5. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \left(\dfrac{3}{x-2}+5x+7\right)$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \left(\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{2}\right)$

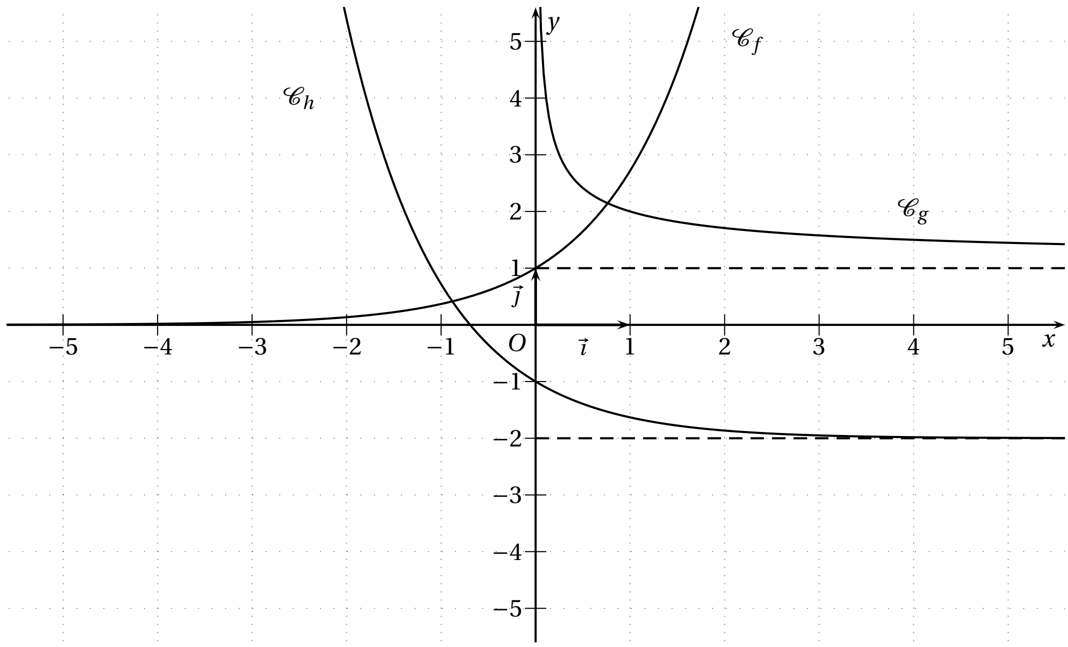
EXERCICE 11.3.
Déterminer les limites des fonctions polynômes suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3+x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3+x\right)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^4-2x^3+5x+4\right)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^4-2x^3+5x+4\right)$

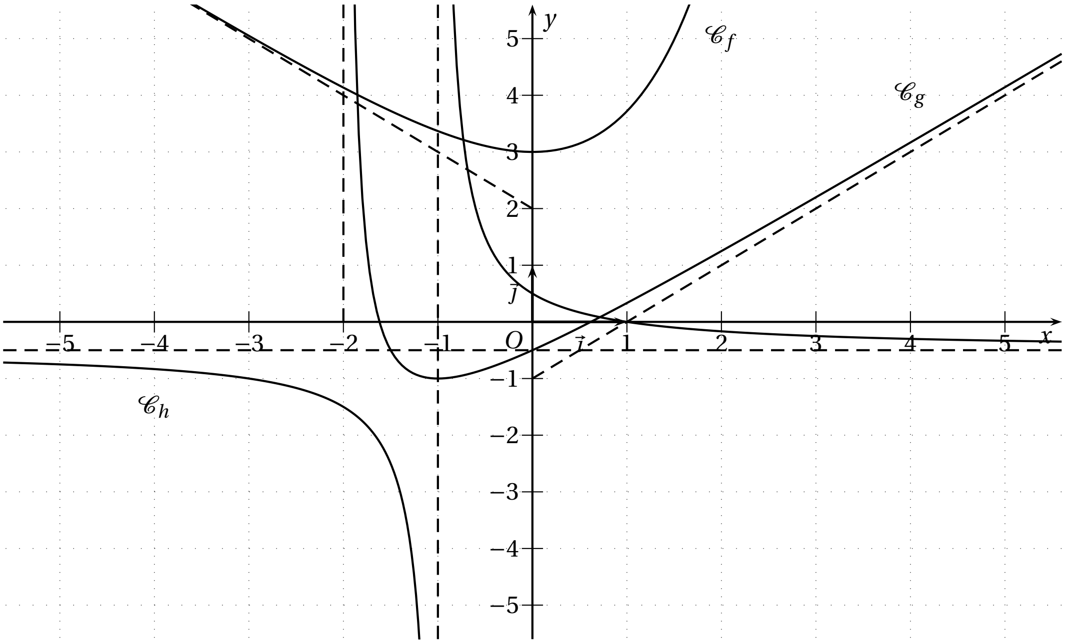
11.6.2 Lectures graphiques

EXERCICE 11.4.
On donne sur la figure ci-dessous les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ de trois fonctions f, g et h.
Pour chacune des trois fonctions :

1. déterminer D, son ensemble de définition ;
2. conjecturer les limites de la fonction aux bornes de cet ensemble de définition.



EXERCICE 11.5.
Même exercice que le précédent (la courbe $\mathscr{C}_h$ est en deux parties).



11.6.3 Étude de fonctions

EXERCICE 11.6.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\left(x^2-1\right)(x-2001)}{2001}$$

Étudier la limite de f en $+\infty$.

EXERCICE 11.7.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer, si elles existent, les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0.

EXERCICE 11.8.
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{-x+1}{2x+3}$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.
   En déduire les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}$.
3. Étudier les variations de f.
4. Dresser le tableau des variations de f en y faisant apparaître les limites aux bornes.

EXERCICE 11.9.
Le but de cet exercice est de déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction :

$$f(x) = \frac{x^2-4x+2}{3-x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{3-x}$$

3. Étude en l'infini.
   (a) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
   (b) $\mathscr{C}$ admet-elle une asymptote horizontale en l'infini ?
   (c) Montrer que la droite d'équation $y = -x+1$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
4. Étude au voisinage de 3.
   (a) Déterminer la limite du numérateur lorsque x tend vers 3.
   (b) Étudier le signe du dénominateur.
   (c) Déterminer la limite du dénominateur lorsque x tend vers 3 par valeurs supérieures.
   (d) En déduire $\lim_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x)$.
   (e) Procéder de même pour déterminer $\lim_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x)$
   (f) $\mathscr{C}$ admet-elle une asymptote verticale ?

EXERCICE 11.10.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2+9x+2}{x^2+1}$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que :
$$f(x) = ax+b+\frac{cx}{x^2+1}$$
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x+2$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
4. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

EXERCICE 11.11.
Soit f la fonction qui a x associe

$$f(x) = \frac{1-2x}{-x^2+2x+3}$$

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   On commencera par étudier le signe de $-x^2+2x+3$ *selon les valeurs de* x.
3. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe représentative de f.

EXERCICE 11.12.
Soit f la fonction définie pour $x \in [1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite de f en $+\infty$.

1. Étudier $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-1}$. Que peut-on en conclure ?
2. Montrer que, pour tous réels A et B strictement positifs, on a : $\sqrt{A}-\sqrt{B} = \dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$
3. En déduire que, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, on a : $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$
4. En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

EXERCICE 11.13.
Soit f, u et v les fonctions définies sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x+\sin x}{x} \qquad u(x) = \frac{2x-1}{x} \qquad v(x) = \frac{2x+1}{x}$$

1. Montrer que, pour tout $x \in [1\,;+\infty[: u(x) \leq f(x) \leq v(x)$.
2. Étudier les limites en $+\infty$ de u et de v.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.