Fonctions à deux variables

1) Définition d'une fonction à deux variables :

Soient x et y deux variables, on définit la fonction $f(x,y)$ qui dépend de deux valeurs x et y. f est donc une fonction de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est à dire qu'à un couple de valeurs de $\mathbb{R}$ elle associe une valeur dans $\mathbb{R}$. Par exemple si $f(x,y)=x^2+y^2$ alors $f(3,1)=3^2+1^2=10$.

L'ensemble de définition de f est donc un sous ensemble de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, c'est à dire un ensemble de couples (x,y) pour lesquels on peut calculer $f(x,y)$.

Exercice 1 :
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

$$f(x,y)=\frac{x^3y^4}{x^2+y^2};\quad f(x,y)=\frac{x-y+xy}{xy};\quad f(x,y)=\frac{x^2+y}{x+y^2};$$

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2};\quad f(x,y)=\frac{x^4+y^4}{4-x^2y^2}.$$

Le dessin d'une fonction de deux variables sera en dimension 3, cela sera une surface. Une façon de visualiser cette surface est de construire des courbes de niveau comme on le fait dans les cartes topographiques.

Exercice 2 :
On appelle courbe de niveau c l'ensemble des points de coordonnées (x,y) vérifiant $f(x,y)=c$ dans le plan $(0,x,y)$. Dessiner les courbes de niveau pour $c=0,1,2$ des fonctions suivantes :
a) $f(x,y)=2x-y-4$
b) $f(x,y)=x^2+y^2$
c) $f(x,y)=xy$.

2) Règle de dérivation :

Pour une fonction à deux variables, on a deux dérivées partielles premières , l'une par rapport x et l'autre par rapport à y.
On définit :
$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, on dérive par rapport à x en considérant y comme une constante.
$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, on dérive par rapport à y en considérant x comme une constante.

Par exemple pour $f(x,y)=3x^2y$, on a $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=6xy$ et $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3x^2$.

Exercice 3 :
Calculer les dérivées partielles premières pour les fonctions à deux variables proposées dans l'exercice 2.

Exercice 4 :

Déterminer la productivité marginale par rapport à x et la productivité marginale par rapport à y pour les fonctions de production suivantes :

a) $z = 2x^{1/2}y^3$.

b) $z = xy + 7x^2y^3 - 6y + 5$.

c) $z = (xy)^3$.

3) Condition pour l'existence d'un extremum :

On cherche les couples (x, y) qui annulent les deux dérivés partielles $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

Les couples de valeurs (x, y) qui annulent les deux dérivés partielles sont appelés "point critique" (ou point singulier) de la fonction.

Les extremums de la fonction seront parmi les couples trouvés (il peut y en avoir plusieurs ou pas). Mais ceci n'est qu'une condition nécessaire, c'est à dire qu'il peut y avoir parmi eux des couples qui ne conviennent pas.

Exercice 5 :

Trouver les points critiques (ou singuliers) des fonctions suivantes :

$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + x + y + 1;$

$f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y;$

$f(x, y) = (1 + x)(1 + y);$

$f(x, y) = x^2 + xy - y^2 + 3x - y;$

$f(x, y) = (1 - x)(1 - y)(x + y - 1);$

On cherche alors une condition suffisante, pour cela il faut utiliser les dérivés partielles d'ordre 2. On les note :

$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$: on dérive à nouveau par rapport à x l'expression $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$.

$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$: on dérive par rapport à y l'expression $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$.

$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$: on dérive par rapport à x l'expression $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$: on dérive à nouveau par rapport à y l'expression $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

On obtient alors 4 dérivées partielles d'ordre 2, un théorème affirme que sous des conditions de continuité, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$, c'est à dire que l'ordre de dérivation n'a pas d'importance.

On se place en un point critique de la fonction f.

On calcule alors

$$H = \frac{\partial f^2(x,y)}{\partial x^2} \times \frac{\partial f^2(x,y)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial f^2(x,y)}{\partial x \partial y}\right)^2$$

Cette expression peut être une constante mais aussi dépendre de x et y. L'existence d'un extremum dépend du signe de H.

- Si $H > 0$, il y a un extremum et il y a deux sous cas :
$\ast \ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} > 0$ c'est un minimum local,
$\ast \ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} < 0$ c'est un maximum local.

- Si $H < 0$ c'est un col (ou point selle).

- Si $H = 0$, le critère est muet, c'est à dire qu'il faudrait regarder des dérivées d'ordre supérieur à 2.

Exercice 6 :
Etudier les minima et maxima des fonctions de base suivantes :
a) $f(x,y) = x^2 + y^2$.
b) $f(x,y) = -x^2 - y^2$
c) $f(x,y) = xy$.

3) Une batterie d'exercices :

Exercice 7 :
Etudier les minima et maxima des fonctions suivantes :
a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
b) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

Exercice 8 :
Soit $f(x,y) = 2x^2 - 3xy - y^2$.
Trouver tous les points extrémaux de f et dire pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum, d'un minimum ou d'un col.

Exercice 9 :
Soit $f(x,y) = x^2 - 3y^2 - 4x + 12y - 2xy$.
Déterminer les valeurs du couple (x,y) qui annulent les dérivées partielles de premier ordre de la fonction$f$. Donner la nature du point correspondant à ce couple.

Exercice 10 :
Soit $f(x,y) = y^3 - x^3 + 147x - 27y$.
Trouver tous les points extrémaux de f (il y en a 4) et dire pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum, d'un minimum ou d'un col.

Exercice 11 :
On considère une boîte sans couvercle de volume 1 (unité de volume) et dont les dimensions de la base rectangulaire sont x et y. Soit f la fonction donnant l'aire des parois de la boîte.
1) Montrer que $f(x,y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$.
2) Existe-t-il de telles boîtes d'aire aussi grande que l'on veut ?
3) Le point critique de la fonction f est-il un extremum ? local ou absolu ?

Exercice 12 :
Etudier les points extrémaux des fonctions :
a) $f(x,y) = x^3 - xy^2$, b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$.

Exercices pour les plus rapides

Exercice 1

Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3 + xy$.

Trouver tous les points extrémaux de f et dire pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum, d'un minimum ou d'un col.

Exercice 2

Soit $f(x, y) = 4x^2 - xy + y^2 - x^3$.

Trouver tous les points extrémaux de f et essayer de donner pour chacun d'eux sa nature.