

SEANCE DE TD : INTERETS COMPOSES .

INTERET COMPOSE . La caractéristique d'un prêt (ou d'un emprunt) à intérêt composé est la capitalisation des intérêts à la fin de la période convenue . $C_n = C_0 (1 + i)^n$

Exemple : On place 4000 € pendant 7 trimestres au taux trimestriel de 1.5%, montrer que $C_7 = 4439.38$ €

Exemple : On place 5000 € au taux annuel de 4.5%, le capital acquis est 5962.58 €. Quelle est la durée du placement ?

Si l'intérêt du pour une année est payé mensuellement ou trimestriellement , il est alors nécessaire de déterminer le taux correspondant . Il existe deux procédés de calcul .

1) **Taux proportionnel** Le taux proportionnel au taux annuel i correspondant à une durée k fois plus petite que l'année est : i/k .

Exemple : Pour un taux annuel de 10%, le taux mensuel proportionnel correspondant sera : 0.833 .

2) **Taux équivalent** Le taux équivalent associé au taux annuel i correspondant à une durée k fois plus petite que l'année est : $i_k = (1 + i)^{1/k} - 1$

Exemple : Pour un taux annuel de 10%, quel sera le taux mensuel actuariel correspondant ?

Exemple : Pour un taux annuel de 14%, montrer que le taux actuariel semestriel sera 6.77%, le taux trimestriel 3.33% .

Le taux annuel équivalent est aussi appelé **taux actuariel** .

EXERCICE 1 : Exemples simples .

On place 5 000 € pour 5 ans au taux annuel de 4.5% . De combien disposera t-on au terme du placement ?

Quelle somme doit on placer aujourd'hui au taux annuel de 5% pour disposer de 10 000 € dans 4 ans ?

On place aujourd'hui 5 000 € au taux annuel de 4.8% . Dans 3 ans , on dispose de 5 920 € . Quel est le taux de ce placement ?

On place aujourd'hui 4 000 € au taux annuel de 5.2% et au terme du placement on obtiendra 6 000 € . Quelle est la durée du placement ?

EXERCICE 2 : Comparaison .

On considère 2 placements à intérêts composés annuellement , l'un de 10 000 € à 5% , et l'autre de 9 000 € au taux de 6% . Au bout de combien de temps auront-ils la même valeur acquise ? Quel sera le montant de cette valeur ?

EXERCICE 3 : Taux proportionnel et taux équivalent .

Que devient un capital de 1 000 € au bout de 5 ans et 4 mois au taux annuel de 5.5% en utilisant les deux taux ci-dessus

EXERCICE 4 : Partage .

Un père dispose actuellement de 50 000 € qu'il souhaite partager entre ses 4 enfants agés respectivement de 16 , 14 , 12 et 10 ans . Ces parts sont placées à intérêts composés annuellement au taux de 3.75% supposé constant sur la période considérée .

Calculer ces 4 parts de manière que les 4 enfants disposent du même capital à leur majorité .

EXERCICE 5 : Placement

En juin 1992 , la Poste a proposé un fonds commun de placement dont les caractéristiques étaient :

Vous investissez le 2 juin la somme de 10 000 F et vous percevez le 2 juin 1995 au minimum 12 400 F .

Quel est le taux actuariel minimum de ce placement ?

EXERCICE 6 : Placement

En juin 1992, la société Cardif propose un contrat d'assurance-vie , le CAC-croissance en précisant que ce produit aurait permis à un investisseur de multiplier son capital par 3.2 entre le 31.12.83 et le 31.12.91 . Calculer le taux actuariel de rendement qui aurait permis d'obtenir cette performance ?

EXERCICE 7 : Placement

On a placé le 31.12.00 la somme de 10 000 € puis tous les ans pendant 5 ans la somme de 5 000 € et on percevra le 1.1.05 la somme de 41 .000 € .

- 1) Construire le diagramme des flux .
- 2) Trouver le taux de ce placement en utilisant (à défaut d'une calculatrice financière) une méthode de dichotomie .

EXERCICE 8 : Placement

Une banque propose un placement sur un an d'une coupure de 5 000 € avec versement des intérêts en fin de trimestre et remboursement de la coupure en fin d'année .

- 1) Construire le diagramme des flux .
- 2) Quel est le montant trimestriel des intérêts bruts sachant que le taux actuariel brut est de 4.5% ?
- 3) Les intérêts sont soumis à des prélèvements fiscaux et sociaux de 25%. Quel est alors le taux actuariel net ?
- 4) Si les intérêts avaient été versés en fin d'année , quel serait leur montant brut et net ? justifier la différence entre les résultats de cette question et de la question 1.

EXERCICE 9: Placement sur 3 ans .

En octobre 1999, la Poste a proposé un fond commun de placement Bénéfic .

- 1) La performance garantie est de +23% à 3 ans , à condition que le CAC ne baisse pas . Quel est alors le taux actuariel brut ?
Si le CAC baisse de 10% à 3 ans , le rendement de Bénéfic est de 13% . Quel est alors le taux actuariel brut ?
- 2) Les droits d'entrée sont de 2% . D'autre part , si le FCP est détenu dans un PEA ou un contrat d'assurance –vie respectant les délais légaux , les bénéfices sont exonérés d'impôts , mais subissent à la clôture du contrat des prélèvements sociaux de 10% .
Quel est alors le taux actuariel net de rendement pour un placement de 3 ans , dans l'hypothèse où le CAC n'a pas baissé ?
Dans la même hypothèse , que devient le taux actuariel net de rendement avec des prélèvements fiscaux et sociaux de 25% ?

EXERCICE 10 : Capitalisation continue .

Supposons un placement à intérêt composé au taux annuel i , avec capitalisation annuelle des intérêts .

Si la capitalisation est quotidienne , en retenant le taux proportionnel , il y aura 360 capitalisations , et le capital C de départ deviendra en fin d'année , $C(1 + i/360)^{360}$.

- 1) Si la capitalisation est instantanée ou continue , montrer que le capital au bout d'un an deviendra e^i , et au bout de n années e^{ni} .
- 2) Si le taux annuel est égal à 10% , calculer le taux de capitalisation continue correspondant .
- 3) Une capitalisation instantanée a conduit au bout d'un an à une multiplication du capital placé par le facteur 1.09.
En cas de capitalisation annuelle , quel est le taux annuel correspondant ?
- 4) Que pensez-vous de la publicité suivante ?

'' Vos dépenses courantes peuvent vous rapporter de l'argent ... En effet, il suffit de verser tous les mois sur votre Epargne Pass l'argent destiné à vos courses . Et vous bénéficiez d'une rémunération quotidienne de 1.5% !''