Equations et inequations du second degré

I. Les équations du second degré

Exercice d'introduction:

Si nous ajoutons 10 au triple d'un nombre, on trouve son carré.
Quel est ce nombre ***(Quels sont ces nombres)*****?**

❶ Choix d'une inconnue : soit **x** le(s) nombre(s) à trouver

❷ Mise en équation: $$10 + 3x = x^2$$

Nous résoudrons cette équation au cours de la leçon

Une équation du second degré à une inconnue peut se présenter sous différentes formes :

$$3x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - 2 = x + 4$$

$$(x - 2)(x + 4) = 2$$

$$2x + 1 = \frac{1}{x}$$

Etc….

Pour les résoudre on doit les mettre sous la forme :

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

Et identifier les coefficients a ; b ; c

Exemple : $10 + 3x = x^2$

On doit se mettre sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$

réponse

$-1\,x^2 + 3x + 10 = 0$

Les coefficients sont :

a =

b =

c =

Exemple : $10 + 3x = x^2$

On doit se mettre sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$

$$-x^2 + 3x + 10 = 0$$

Les coefficients sont :

a = -1

b = 3

c = 10

Méthode de résolution

Pour résoudre une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ on doit calculer le discriminant Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Ex: $-1x^2 + 3x + 10 = 0$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times 10$$

$$\Delta = 49$$

Exercices

Suivant le valeur du discriminant Δ 3 cas sont envisageables

- **$\Delta>0$** Il y a deux solutions x_1 et x_2

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ex: **$-x^2 + 3x + 10 = 0$** $\Delta = 49$

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{49}}{2x(-1)} \qquad x_2 = \frac{-3+\sqrt{49}}{2x(-1)}$$

$$x_1 = 5 \qquad x_2 = -2$$

Ce sont les solutions du problème initial

- **$\Delta=0$** Il y a une solution x_1

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

- **$\Delta<0$** Il n'y a aucune solution dans $\mathbb{R}$

Exercices

Interprétation graphique Cabri-géomètre

exemples

Mettre sous la forme $ax^2+bx+c=0$
Déterminer les coef a ; b ; c

$5x^2+16x= -3$

$5x^2+16x+3=0$ a=5 b=16 c=3

Δ

$\Delta=16^2- 4\times5\times3$

$\Delta=196$

x

$$x_1 = \frac{-16-\sqrt{196}}{2\times5} \qquad x_2 = \frac{-16+\sqrt{196}}{2\times5}$$

$\boxed{x_1 = -3}$ $\boxed{x_2 = -0,2}$

$2x^2-6x-16 = -2x^2-6x$

$4x^2-16=0$ a=4 b=0 c= -16

Δ

$\Delta=0^2- 4\times4\times(-16)$

$\Delta=256$

x

$$x_1 = \frac{-\sqrt{256}}{2\times4} \qquad x_1 = \frac{\sqrt{256}}{2\times4}$$

$\boxed{x_1 = -2}$ $\boxed{x_2 = 2}$

Remarque:

Avec les identités remarquables :

$4x^2-16=0$
$(2x+4)(2x-4)=0$

$(2x+4)=0$ ou $(2x-4)=0$
$x= -2$ ou $x=2$

$\frac{3x^2+3}{5} = x$

$3x^2-5x+3=0$ a=3 b=-5 c=3

Δ $\Delta= -11$

x

Il n'y a aucune solution

Exemple en micro-économie

Le coût moyen dépend de la quantité produite Q par la relation :
$C_M = 5Q^2 - 20Q + 45$.

Vérifier que ce coût n'est jamais nul.

Solution :

On calcule $\Delta = (-20)^2 + 4 \times 5 \times 45 = 400 - 900 = -500 < 0$ donc l'équation $C_M = 0$ n'a pas de solution.

II. Inéquations de second degré

Soit une inéquation du second degré :

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ où } a \neq 0.$$

On calcule alors le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$
et suivant le signe de Δ, on a les trois cas suivants :

Si < 0, l'expression est toujours du signe de a donc deux cas possible : pas de solution ou R tout entier.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a

Exemple :

Soit à résoudre:

$$x^2 + x + 1 > 0.$$

On calcule alors le discriminant :

$$\Delta = -3 \quad \text{donc} \quad \Delta < 0.$$

Comme a > 0, on a $S = \mathbb{R}$

Si on pose $x^2 + x + 1 < 0$ alors $S = \emptyset$.

Exemple en micro-économie:

Reprenons l'exemple du coût moyen qui dépend de la quantité produite Q par la relation :
$C_M = 5Q^2 - 20Q + 45$.

On a calculé $\Delta = (-20)^2 - 4 \times 5 \times 45 = -500 < 0$
donc $C_M = 0$ n'a pas de solution.

C_M est toujours du signe de a (ici 5) donc toujours positif ce qui est rassurant pour un coût.

Si Δ= 0, l'expression est toujours du signe de a sauf pour $x_0 = -\frac{b}{2a}$ elle vaut 0.

Si Δ= 0 on a :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de a	

Exemples :

Soit à résoudre $3x^2 + 6x + 3 > 0$, la seule valeur à exclure est -1.

Soit à résoudre $3x^2 + 6x + 3 \geq 0$, alors S = $\mathbb{R}$

Soit à résoudre $3x^2 + 6x + 3 \leq 0$, alors S = { - 1 }

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

Si $\Delta > 0$ alors l'expression change de signe pour $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et pour $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Elle est du signe de a à l'extérieur des valeurs x_1 et x_2.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de -a	0	signe de a

Soit à résoudre $3x^2 - 2x - 1 > 0$ alors $S =]-\infty, -\frac{1}{3}[\cup]1, +\infty[$.

Soit à résoudre $3x^2 - 2x - 1 \leq 0$, alors $S = [-\frac{1}{3}, 1]$.

Le bénéfice d'une entreprise dépend du nombre d'unités vendues x par la formule :

$$B(x) = 11x - x^2 - 10$$

Pour quelles valeurs de x le bénéfice est nul ?

Pour quelles valeurs de x y a-t-il réellement bénéfice ?

Le bénéfice d'une entreprise dépend du nombre d'unités vendues x par la formule :

$$B(x) = 11x - x^2 - 10$$

Pour quelles valeurs de x le bénéfice est nul ?

Pour quelles valeurs de x y a-t-il réellement bénéfice ?

On résout $11x - x^2 - 10 = 0$ soit une équation du second degré avec $a = -1$, $b = 11$ et $c = -10$.

On obtient $\Delta = 11^2 - 4\,(-1)\,(-10) = 121 - 40 = 81 > 0$

donc il y a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11+\sqrt{81}}{2(-1)} = 1 \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11-\sqrt{81}}{2(-1)} = 10.$$

On en déduit que le bénéfice est nul pour une production de 1 unité ou de 10 unités et au niveau des signes :

x	.	1		10	.
$11x - x^2 - 10$	sig. de a ici -	0	sig. de -a ici +	0	sig. de *a* ici -

Donc il y a réellement bénéfice pour x compris entre 1 et 10.

FIN du Diaporama