

Equations et inequations du second degré

I. Les équations du second degré

Exercice d'introduction:

Si nous ajoutons 10 au triple d'un nombre, on trouve son carré.
Quel est ce nombre (*Quels sont ces nombres*)?

❶ Choix d'une inconnue : soit x le(s) nombre(s) à trouver

❷ Mise en équation: $10 + 3x = x^2$

Nous résoudrons cette équation au cours de la leçon



Une équation du second degré à une inconnue peut se présenter sous différentes formes :

$$3x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - 2 = x + 4$$

$$(x - 2)(x + 4) = 2$$

$$2x + 1 = \frac{1}{x}$$

Etc....

Pour les résoudre on doit les mettre sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Et identifier les coefficients a ; b ; c

Exemple : $10 + 3x = x^2$

On doit se mettre sous la forme $\underline{a}x^2 + \underline{b}x + \underline{c} = 0$

réponse

$$-1x^2 + 3x + 10 = 0$$

Les coefficients sont :

a =

b =

c =

Exemple : $10 + 3x = x^2$

On doit se mettre sous la forme $\underline{a}x^2 + \underline{b}x + \underline{c} = 0$

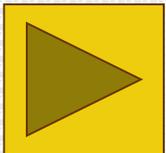
$$- x^2 + 3x + 10 = 0$$

Les coefficients sont :

$$a = -1$$

$$b = 3$$

$$c = 10$$



Méthode de résolution

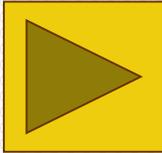
Pour résoudre une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ on doit calculer le discriminant Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Ex: $-1x^2 + 3x + 10 = 0$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times 10$$
$$\Delta = 49$$

Exercices



Suivant la valeur du discriminant Δ 3 cas sont envisageables

- $\Delta > 0$ Il y a deux solutions x_1 et x_2

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ex: - $x^2 + 3x + 10 = 0$ $\Delta = 49$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2 \times (-1)}$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2 \times (-1)}$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -2$$

Ce sont les solutions du problème initial

- $\Delta = 0$ Il y a une solution x_1

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

Exercices

- $\Delta < 0$ Il n'y a aucune solution dans \mathbb{R}

*Interprétation graphique
Cabri-géomètre*

exemples

Mettre sous la forme $ax^2+bx+c=0$
Déterminer les coef a ; b ; c

$$5x^2+16x=-3$$

$$5x^2+16x+3=0 \quad a=5 \quad b=16 \quad c=3$$

Δ

$$\Delta=16^2-4 \times 5 \times 3$$

$$\Delta=196$$

x

$$x_1 = \frac{-16-\sqrt{196}}{2 \times 5}$$

$$x_2 = \frac{-16+\sqrt{196}}{2 \times 5}$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = -0,2$$

$$2x^2-6x-16 = -2x^2-6x$$

$$4x^2-16=0$$

$$a=4 \quad b=0 \quad c=-16$$

Δ

$$\Delta=0^2-4 \times 4 \times (-16)$$

$$\Delta=256$$

x

$$x_1 = \frac{-\sqrt{256}}{2 \times 4}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{256}}{2 \times 4}$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 2$$

Remarque:

Avec les identités remarquables :

$$4x^2-16=0$$

$$(2x+4)(2x-4)=0$$

$$(2x+4)=0$$

$$x=-2$$

ou

$$(2x-4)=0$$

ou

$$x=2$$

$$\frac{3x^2+3}{5} = x$$

$$3x^2-5x+3=0$$

$$a=3 \quad b=-5 \quad c=3$$

$$\Delta = -11$$

x

Il n'y a aucune solution

David Volant, Licence AES 1ère

année



8



Exemple en micro-économie

Le coût moyen dépend de la quantité produite Q par la relation :

$$C_M = 5Q^2 - 20Q + 45.$$

Vérifier que ce coût n'est jamais nul.

Solution :

On calcule $\Delta = (-20)^2 + 4 \times 5 \times 45 = 400 - 900 = -500 < 0$
donc l'équation $C_M = 0$ n'a pas de solution.



II. Inéquations de second degré

Soit une inéquation du second degré :

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ où } a \neq 0.$$

On calcule alors le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$
et suivant le signe de Δ , on a les trois cas suivants :

Si $\Delta < 0$, l'expression est toujours du signe de a donc deux cas possible : pas de solution ou \mathbb{R} tout entier.

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a	



Exemple :

Soit à résoudre:

$$x^2 + x + 1 > 0.$$

On calcule alors le discriminant :

$$\Delta = -3 \quad \text{donc} \quad \Delta < 0.$$

Comme $a > 0$, on a $S = \mathbb{R}$

Si on pose $x^2 + x + 1 < 0$ alors $S = \emptyset$.



Exemple en micro-économie:

Reprenons l'exemple du coût moyen qui dépend de la quantité produite Q par la relation :

$$C_M = 5Q^2 - 20Q + 45.$$

On a calculé $\Delta = (-20)^2 - 4 \times 5 \times 45 = -500 < 0$
donc $C_M = 0$ n'a pas de solution.

C_M est toujours du signe de a (ici 5) donc toujours positif ce qui est rassurant pour un coût.

Si $\Delta = 0$, l'expression est toujours du signe de a
sauf pour

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

elle vaut 0.

Si $\Delta = 0$ on a :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

Exemples :

Soit à résoudre $3x^2 + 6x + 3 > 0$, la seule valeur à exclure est -1 .

Soit à résoudre $3x^2 + 6x + 3 \geq 0$, alors $S = \mathbb{R}$

Soit à résoudre $3x^2 + 6x + 3 \leq 0$, alors $S = \{ -1 \}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a



Si $\Delta > 0$ alors l'expression change de signe pour $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et pour $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$. Elle est du signe de a à l'extérieur des valeurs x_1 et x_2 .

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

Soit à résoudre $3x^2 - 2x - 1 > 0$

alors $S =] -\infty, -\frac{1}{3}[\cup]1, +\infty[.$

Soit à résoudre $3x^2 - 2x - 1 \leq 0$,

alors $S = [-\frac{1}{3}, 1].$

Le bénéfice d'une entreprise dépend du nombre d'unités vendues x par la formule :

$$B(x) = 11x - x^2 - 10$$

Pour quelles valeurs de x le bénéfice est nul ?

Pour quelles valeurs de x y a-t-il réellement bénéfice ?

Le bénéfice d'une entreprise dépend du nombre d'unités vendues x par la formule :

$$B(x) = 11x - x^2 - 10$$

Pour quelles valeurs de x le bénéfice est nul ?

Pour quelles valeurs de x y a-t-il réellement bénéfice ?

On résout $11x - x^2 - 10 = 0$ soit une équation du second degré avec $a = -1$, $b = 11$ et $c = -10$.

On obtient $\Delta = 11^2 - 4(-1)(-10) = 121 - 40 = 81 > 0$

donc il y a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11 + \sqrt{81}}{2(-1)} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11 - \sqrt{81}}{2(-1)} = 10.$$

On en déduit que le bénéfice est nul pour une production de 1 unité ou de 10 unités et au niveau des signes :

x	.	1		10	.
$11x - x^2 - 10$	sig. de a ici -	0	sig. de $-a$ ici +	0	sig. de a ici -

Donc il y a réellement bénéfice pour x compris entre 1 et 10.

FIN

du
Rapport

