I – Notion

Lorsqu'on a un capital à placer dans une institution financière deux possibilités peuvent s'offrir :

- Soit le capital est retiré augmenté des intérêts calculés une seule fois à la fin de la dernière période (intérêts simples) ;
- Soit le capital est retiré augmenté des intérêts calculés de façon successive à la fin de chaque période.

  Les intérêts calculés à la fin de chaque période dans ce 2ème cas sont incorporés au capital de début de période pour être replacé pour le compte de la période suivante. Ainsi les valeurs acquises obtenues à la fin de chaque période sont aussitôt replacées pour générer des intérêts pour le compte de la période suivante. Les intérêts contenus dans ces valeurs acquises génèrent à leur tour d'autres intérêts : on parle de **Capitalisation des Intérêts**.

II – Généralisation de la notion : formule fondamentale

Soit un capital **C** placé au taux **i** (taux pour un euro : **i** = t /100) pendant une période on a :

Période	Capital Début Période	Intérêts	Capital Fin Période
1	C	Ci	$C+Ci = C(1+i)$
2	$C(1+i)$	$C(1+i)\,i$	$C(1+i) + C(1+i)\,i = C(1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$	$C(1+i)^2\,i$	$C(1+i)^2 + C(1+i)^2\,i = C(1+i)^3$
k	$C(1+i)^{k-1}$	$C(1+i)^{k-1}\,i$	$C(1+i)^{k-1} + C(1+i)^{k-1}\,i = C(1+i)^k$
n	$C(1+i)^{n-1}$	$C(1+i)^{n-1}\,i$	$C(1+i)^{n-1} + C(1+i)^{n-1}\,I = C(1+i)^n$

La formule fondamentale en intérêt composé de la valeur acquise est :

$$\mathbf{C_n = C\,(1+i)^n}$$

Remarque : C_n est la valeur acquise par le capital C placé au taux i pendant n périodes.

- Contrairement aux intérêts simples la formule fondamentale en intérêt composé débouche sur la valeur acquise. Pour trouver donc l'intérêt il faut faire la différence entre la valeur acquise et le capital placé. Soit **I** l'intérêt
  $\mathbf{I} = C_n - C$ soit $\mathbf{I} = C\,(1+i)^{\mathbf{n}} - C$

  Donc on a $\boxed{\mathbf{I = C\,[\,(1+i)^n - 1\,]}}$

  L'intérêt au cours d'une période p quelconque est $\mathbf{I_p = C\,(1+i)^{p-1}\,i}$

- Les valeurs acquises obtenues à la fin de chaque période de même que les intérêts contenus dans ces valeurs acquises sont en progression géométrique de raison 1+i

Exercices corrigés

Exercie1 : Quelle est la valeur acquise par un capital de 2 000 000 € placé à un intérêt composé au taux de 5% pendant 3 ans. ?

Exercice 2 : Quel capital doit –on placé au taux de 6% pour disposer de 796 924 € à la fin de la $8^{ème}$ année ?

Exercice 3 : A quel taux doit –on placé un capital de 800 000 € pour obtenir à la fin de la $5^{ème}$ une valeur acquise de 1 148 503,461 € ?

Exercice 4 : Pendant combien de temps un capital donné placé au taux de 8% peut-il s'accroitre de 25% de sa valeur.

Remarque: Le capital de 500 000 obtenu dans le deuxième exercice n'est rien d'autre que la valeur actuelle de 796 924. Pour obtenir la valeur actuelle il suffit d'actualiser la valeur acquise. Cette consiste à repousser la valeur acquise à l'origine. Ceci nous pousse à déduire la valeur actuelle d'un capital placé à un taux i qui nommé $C_0 = C\,(1+i)^{-n}$. Cette formule représente la formule générale de la valeur actuelle en intérêt composé.

Exercice corrigé sur la valeur actuelle et calcul d'intérêt

Exercice 5 corrigé :

Une personne désire disposer une somme de 540 242,75 € à la fin dans 15 ans. Pour ce faire il place un capital C à un taux semestriel de 5%. La capitalisation des intérêts étant semestrielle :

1. Déterminer le capital C placé
2. Le capital trouvé est placé à un taux semestriel de 5% pendant 15 ans. La capitalisation des intérêts étant semestrielle
   - **2.1.** Déterminer la valeur acquise. Que remarquez-vous ?
   - **2.2.** Déterminer les intérêts produit au cours de la $8^{ème}$ et $12^{ème}$ périodes.
   - **2.3.** Déterminer l'intérêt global de ce placement.

Corrigé :

1. Déterminons le capital **C** placé

   C représente dans ce cas la valeur actuelle et équivaut à C_0. Si on doit appliquer la formule de la valeur actuelle on a $C_0 = C\ (1+i)^{-n}$ dans ce cas le C de la formule est égal à 540 242,75 le taux t = 5%. La capitalisation étant semestrielle on n = 15 x 2 soit n = 30 semestres. Ceci dit $C_0 = 540\ 242{,}75\ (1{,}05)^{-30}$ **soit** $C_0 = 125\ 000$ le capital placé est égal à 125 000 €

2.

2.1. Déterminons la valeur acquise

Soit C_n cette valeur acquise. On a : $C_n = 125\ 000(1{,}05)^{30}$ **soit** **$C_n = 540\ 242{,}75$ €**. Nous remarquons que C_n est égal à la somme dont voulait disposer la personne dans 15 ans.

2.2. Déterminons l'intérêt produit au cours :

- De la 8 ème période

Soit I_8 cet intérêt. $I_8 = C\ (1+i)^{8-1}\ i$ soit $I_8 = 125\ 000(1{,}05)^7 \times 0{,}05$ soit $I_8 = 8794{,}375$ € ou soit $I_8 = C_8 - C_7$ soit $I_8 = 125000[(1{,}05)^8 - (1{,}05)^7]$ soit $I_8 = 8794{,}375$ €.

- De la 12 eme période

Soit I_{12} cet intérêt. $I_{12} = C\ (1+i)^{12-1}\ i$ soit $I_8 = 125\ 000(1{,}05)^{11} \times 0{,}05$ soit $I_{12} =10689{,}61875$ € ou soit $I_{12} = C_{12} - C_{11}$ soit

$I_{12}=125000[(1{,}05)^{12} - (1{,}05)^{11}]$

Soit $I_{12} =10689{,}61875$ €.

2.3. Déterminons l'intérêt global de ce placement

- 1ère méthode

I = Cn – C soit I = 540 242, 75 – 125000 soit I = 415242,75 €

- 2ème méthode

$I = Cn - C$ soit $I = C\ (1+i)^{30} - C$ soit $I = C\ [(1+i)^{30} - 1]$

Donc on a

$I = 125000[(1{,}05)^{30} - 1]$ soit I = 415242,75 €

III – Formule de la valeur acquise à intérêts composé quand le temps de placement est un nombre non entier de périodes

Il existe trois méthodes de résolution pour le calcul de la valeur acquise.

A. Méthode logique ou rationnel

$C_{k+p/q} = C_k + C_k\, i\, p/q$ soit $C_{k+p/q} = C_k\,(1+ i\, p/q)$ soit $\mathbf{C_{k+p/q} = C(1+i)^k(1+ i\, p/q)}$
K est la partie entière du temps de placement. P est la partie non entière et Q = 12. C_k représente la valeur acquise de la partie entière.

B. Méthode commerciale ou pratique

$C_{k+p/q} = \mathbf{C(1+i)^{k+p/q}}$

C. Méthode par interpolation

$\mathbf{C_{k+p/q} = C\,(1+i)^{k} + p/q\,(C_{k+1} - C_k)}$

Application

Exercice : Un capital de 250 000 € est placé à intérêts composé pendant 7 ans 3 mois.

Calculer la valeur acquise par ce capital à l'expiration de la durée prévue sachant que le taux de placement est de 11% (capitalisation annuelle des intérêts).

Corrigé :

IV – Taux proportionnel - Taux équivalent

- ✓ **Taux proportionnel** : Deux taux correspondants à des périodes de capitalisations différentes sont proportionnels lorsque leur rapport est égal au rapport de leur période capitalisation respective. Si i_a est un taux annuel, i_s est un taux semestriel proportionnel au taux annuel, i_t est un taux trimestriel proportionnel au taux annuel, i_m est un taux mensuel proportionnel au taux annuel, i_{ba} est un taux bisannuel proportionnel au taux annuel alors on a :

  $\mathbf{i_s = i_a / 2}$ $\quad$ $\mathbf{i_t = i_a / 4}$ $\quad$ $\mathbf{i_m = i_a / 12}$ $\quad$ $\mathbf{i_{ba} = 2\, i_a}$

  Remarque : En intérêts simples les taux proportionnels conduisent le capital pendant la même durée de capitalisation à une même valeur acquise. Par contre en intérêts composés les valeurs acquises sont différentes.

Application

Exercice : calculer

a) Le taux semestriel proportionnel au taux annuel de 8 %
b) Le taux mensuel proportionnel au taux semestriel de 6%
c) Le taux trimestriel proportionnel au taux annuel de 12%
d) Le taux bimensuel proportionnel au taux semestriel de 9%
e) Le taux bisannuel proportionnel au taux annuel de 3 %

- ✓ **<u>Taux équivalent</u> :** Deux taux correspondants à des périodes de capitalisations différentes son équivalents si et seulement si pour un même capital et pour une même durée, ils conduisent à une même valeur acquise. Un capital C placé au taux annuel i_a pendant 1 an a pour valeur acquise C $(1+ i_a)^{1}$. Pour réussir à déterminer le taux équivalent, on identifie rapidement la plus grande période et la plus petite période. On recherche combien de fois on a la plus petite période dans la grande période.

  <u>Exemple</u> :

  i_a = le taux annuel ; i_s = le taux semestriel ; i_t = le taux trimestriel ;
  i_m =le taux mensuel ; i_b = le taux bisannuel

  - i_s équivalent à i_a **soit** $(1+ia)^1 = (1+is)^2$ soit $is = \sqrt{(1+\text{ia})} - 1$

  La plus grande période ici est l'année et la plus petite période est le semestre ce qui signifie que 1 année = 2 semestre ce qui justifie les exposants.

  - i_t équivalent à ia **soit** $(1+i_a)^1 = (1+i_t)^4$ **soit** $\mathbf{it} = \sqrt[4]{(1 + ia)} - 1$
  - i_a équivalent à ib **soit** $(1+i_b)^1 = (1+i_a)^2$ **soit** $\mathbf{ia} = \sqrt[2]{(1 + ib)} - 1$

  <u>Remarque</u> : Le taux équivalent est utilisé en intérêts composé alors que le taux proportionnel est utilisé en intérêt simple.

Application

Exercice : Calculer

a) Le taux semestriel équivalent au taux annuel de 10%
b) Le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 8%
c) Le taux mensuel équivalent au taux annuel de 9%
d) Le taux annuel équivalent au taux bisannuel de 10,25%

A. *Escompte à intérêts composés*

1. *Calcul de la valeur actuel d'un capital ou d'un effet*

Définition : la valeur actuelle au taux i par francs par périodes d'un effet de valeur nominal C payable dans n périodes est la somme C_0 telle que, capitalisée pendant n période au taux i, elle reproduise la valeur nominale.

Formulation : Posons $C = C_0 (1+i)^n$ ce qui conduit à $C_0 = C (1+i)^{-n}$ **telle** est la formule de la valeur actuelle d'un capital ou d'un effet. L'expression $(1+i)^{-n}$ **se** lit dans la table financière n°2

2. *Calcul de l'escompte à intérêts composés*

Dans la pratique, on emploi l'escompte commercial quand il s'agit de négocier des effets dont l'échéance est rapprochée. Mais pour les effets à une échéance lointaine, il est plus logique d'employer l'escompte à intérêts composés (e) qui est la différence entre la valeur nominale d'un effet et la valeur actuelle de l'effet c'est-à-dire :

$$e = C - C_0 \text{ soit } e = C - C(1+i)^{-n} \textbf{ soit } \mathbf{e = C\,[1-(1+i)^{-n}]}$$

Application : Quel l'escompte à intérêts composés d'un capital de 200 000 € payable dans 5 an 6 mois ? Taux annuel 8%

B. *Equivalence à intérêts composés*

1. *Equivalence entre deux capitaux ou deux effets*

Définition: Deux capitaux ou effet de valeurs nominales différentes (V_1, V_2) et d'échéances différentes (n_1, n_2) escomptés à intérêts composés au même taux sont dits équivalents lorsqu'ils ont à la date de l'escompte, des valeurs actuelles égales entre elles.

Equation d'équivalence : valeur actuelle du 1^er^ effet = valeur actuelle du 2^nd^ effet

$$V_1 (1+i)^{-n1} = V_2 (1+i)^{-n}$$

2. *Problèmes pratiques posés sur la notion d'équivalence*

- Recherche de la valeur nominale de l'effet remplaçant

Application : Quelle est la valeur nominale d'un effet payable dans 15 ans susceptible de remplacer équitablement à 4% de capitalisation annuelle, un effet de 2000 € payable dans 7 ans ?

- Recherche de l'échéance de l'effet remplaçant

Application : Quelle est l'échéance de l'effet de 1462 € créé en remplacement d'un effet de 1000 € payable dans 5 ans au taux de capitalisation annuelle de 6%

- Recherche du taux d'équivalence

Application : les effets suivants : 2411,70 € payable dans 20 ans et 1422,10 € payable dans 8 ans sont équivalents. A quel taux l'équivalence a-t-elle été calculée ?

3. *Equivalence entre plusieurs capitaux et plusieurs autres*

Les effets V_1, V_2, V_3,… échéant respectivement dans n_1, n_2, n_3,… période sont équivalents aux effets U_1, U_2, U_3,… échéant respectivement dans p_1, p_2, p_3,…. Périodes si la somme des valeurs actuelles des effets V est égale à la somme des valeurs actuelle des effets U.

Si i est le taux pour un francs par période, l'équation d'équivalence dérivée de la définition pourra s'écrire :

$$\sum_{i=1}^{m} Vi\,(1+i)^{-ni} = \sum_{i=1}^{m} Ui\,(1+i)^{-pi}$$

Application : Un débiteur désire remplacer les deux dettes suivantes : 4000 € payables dans 4 ans et 7000 € payables dans 6 ans par deux versements d'égale valeur nominale à régler dans 2 et 4 ans. Quel doit être le montant de ces versements si le taux est de 5% l'an ?

4. *Remplacement d'un effet par plusieurs autres effets*

Pour remplacer un effet par plusieurs autres, il suffit de poser que la valeur actuelle de l'effet unique à remplacer est égale à la somme des valeurs actuelles des effets remplaçant, c'est-à-dire :

$$V\,(1+i)^{-n} = \sum_{i=1}^{n} Vi\,(1+i)^{-n}$$

V est le nominal de l'effet unique remplacé, n est le nombre de périodes entre la date d'équivalence et l'échéance de l'effet.

Application 1 : Mr Dubois désire remplacer un effet unique de nominal 200 000 € payable dans 8 ans par trois de même valeur nominale à régler dans 2 4 et 6 ans. Quel doit être le montant commun à ces trois effets si le taux annuel est de 6% l'an ?

Application 2 : Un débiteur qui doit s'acquitter des dettes suivantes : 25 000 €, 20 000 € et 40 000 € payables respectivement dans 1an, 1an 6mois et 2an 6mois obtient de son créancier de se libérer par un paiement unique dans 5ans.

1. Calculer la valeur nominale de ce paiement unique au taux de 6% l'an
2. Déterminer l'échéance pour un paiement unique de 150 000 €.

- *Echéance moyenne*

Dans le cas particulier où la valeur nominale de l'effet unique remplaçant est égale à la somme des valeurs nominales des effets remplacés, la date d'échéance du paiement unique est dite ***Echéance moyenne.***

A l'équivalence, on a : Valeur actuelle de l'effet remplaçant = somme des valeurs actuelles des effets remplacés c'est-à-dire :

$V\,(1+i)^{-n} = \sum_{i=1}^{n} Vi\,(1+i)^{-n}$

Application : Un débiteur retrouve dans son portefeuille les dettes suivantes 1 600 000 € impayé depuis 15 mois ; 2 400 000 € payables dans 42 mois ; 2 700 000 € payables dans 4 ans et 1 300 000 € payable dans 30 mois.

1. Le débiteur négocie et obtient de son créancier de rembourser ces dettes par deux versements bisannuels égaux, le premier dans 1 an. Quel est au taux de 8% la valeur commune des versements bisannuels ?
2. En réalité ces dettes devraient être remboursées par un versement unique dans trois ans. Quelle est dans les mêmes conditions de taux la valeur du versement unique.
3. Déterminer l'échéance moyenne des quatre dettes.