COURS DE MATHEMATIQUES – TERMINALE STG

§ 1. TAUX D' EVOLUTION ET COEFFICIENTS MULTIPLICATEURS

a. Taux d'évolution

Définition :

Lorsqu'une grandeur évolue de la valeur y_1 à la valeur y_2, le taux d'évolution t est donné par :

- $\boxed{t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}}$.

Exercice :

Dans chaque cas, calculer le taux d'évolution de la grandeur concernée.

i. Un article coûtait 35 € en juin 2007 et 42 € en septembre 2007.
ii. Le cours d'une action est passé de 60 € à 57 € en un jour.

i. On a : $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{42 - 35}{35} = \frac{7}{35} = 0{,}20 = +\ 20\ \%$. Le prix de l'article a augmenté de 20 %.
ii. On a : $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{57 - 60}{60} = -\frac{3}{60} = -\ 0{,}05 = -\ 5\ \%$. Le cours de l'action a diminué de 5 %.

b. Coefficient multiplicateur

Définition :

Le **coefficient multiplicateur** c d'une grandeur qui évolue de la valeur y_1 à la valeur y_2 est donné par :

- $\boxed{c = \frac{y_2}{y_1}}$.

Exemple :

- Un article coûtait 35 € en juin 2007 et 42 € en septembre 2007.

On a : $c = \frac{42}{35} = 1{,}20$.

Propriété :

Soit t le taux d'évolution d'une grandeur qui évolue de la valeur y_1 à la valeur y_2 et c le coefficient multiplicateur de cette grandeur. On a :

- $\boxed{c = 1 + t}$.

Remarques :

i. Si $t > 0$, alors $c > 1$.
ii. Si $t < 0$, alors $0 < c < 1$.

Exemple :

t	c
+ 5 %	1,05
– 25 %	0,75
+ 101 %	2,01
+ 0,5 %	1,005
– 99 %	0,01

c. Calcul d'une grandeur

Méthode :

On considère une grandeur qui évolue de la valeur y_1 à la valeur y_2 et on note t le taux d'évolution de la valeur y_1 à la valeur y_2. On a :

- $\boxed{y_2 = (1 + t) \times y_1}$.
- $\boxed{y_1 = \dfrac{y_2}{(1 + t)}}$.

Exercice :

i. Une baguette de pain coûte 1,20 € en juin 2010. Son prix augmente de 15 % durant l'été 2010. Quel est son prix en septembre 2010 ?
ii. Au bout d'un an, j'ai retiré 936 € d'un capital placé à intérêts composés au taux annuel de 4 %. Quel capital ai-je placé ?

i. On a : $y_2 = (1 + t) \times y_1 = 1{,}15 \times 1{,}20 = 1{,}38$. La baguette de pain coûte 1,38 € en septembre 2010.
ii. On a : $y_1 = \dfrac{y_2}{(1 + t)} = \dfrac{936}{1{,}04} = 900$. J'ai placé 900 €.

d. Evolution réciproque

Propriété :

Si t est un taux d'évolution, alors le taux d'évolution réciproque est tel que :

- $\boxed{1 + t_{\text{réciproque}} = \dfrac{1}{1 + t}}$.

Remarque :

Une hausse de 25 % n'est pas compensée par une baisse de 25 %.

Exercice :

Quelle baisse compense une hausse de 25 % ?

On a : $1 + t_{\text{réciproque}} = \dfrac{1}{1 + t} = \dfrac{1}{1{,}25} = 0{,}80$.
D'où $t_{\text{réciproque}} = -20$ %.
Une hausse de 25 % est compensée par une baisse de 20 %.

§ 2. EVOLUTIONS SUCCESSIVES

a. Taux global

Propriété :

Si t_1 et t_2 sont les taux de deux évolutions successives, alors le taux d'évolution global est tel que :

- $\boxed{1 + t_{\text{global}} = (1 + t_1) \times (1 + t_2)}$.

Exemple :

- On considère une hausse de 10 % suivie d'une hausse de 20 %.

On a : $1 + t_{\text{global}} = (1 + t_1) \times (1 + t_2) = 1{,}10 \times 1{,}20 = 1{,}32$.
La hausse globale est de 32 %.

b. Taux moyen

Propriété :

Si t_1 et t_2 sont les taux de deux évolutions successives, alors le taux d'évolution moyen est tel que :

- $\boxed{1 + t_{moyen} = \sqrt{(1 + t_1) \times (1 + t_2)}}$.

Exemple :

- On considère une hausse de 10 % suivie d'une hausse de 20 %.

On a : $1 + t_{moyen} = \sqrt{(1 + t_1) \times (1 + t_2)} = \sqrt{1{,}10 \times 1{,}20} \approx 1{,}1489$.La hausse moyenne est d'environ 14,89 %.

§ 3. EVOLUTIONS EN TERME D'INDICES

a. Indice simple

Définition :

On considère une grandeur ayant évolué de la valeur y_1 à la valeur y_2 entre deux dates t_1 et t_2.
Dire que I_2 est l'**indice simple** à la date t_2 en prenant I_1 pour base à la date t_1 signifie que :

- $\boxed{\frac{I_2}{I_1} = \frac{y_2}{y_1}}$.

Exemple :

- Le cours d'une action est passé de 45 € à 54 € entre 2000 et 2001.

L'indice simple en 2001 en prenant 100 pour base en 2000 est donné par :
$I_2 = I_1 \times \frac{y_2}{y_1} = 100 \times \frac{54}{45} = 100 \times 1{,}20 = 120$.

b. Taux d'évolution en terme d'indices

Propriété :

Le taux d'évolution entre deux valeurs y_1 et y_2 est égal au taux d'évolution entre les indices associés.
Autrement dit :

- $\boxed{t = \frac{I_2 - I_1}{I_1}}$.

Exercice :

On considère le tableau :

Année	2003	2004	2005
Indice	100	102	103,5

Calculer le taux d'évolution entre 2003 et 2004 puis le taux d'évolution entre 2004 et 2005.

Soit t_1 le taux d'évolution entre 2003 et 2004. On a : $t_1 = \frac{102 - 100}{100} = 2$ %.

Soit t_2 le taux d'évolution entre 2003 et 2004. On a : $t_2 = \frac{103{,}5 - 102}{102} \approx 1{,}47$ %.

Remarque :

Le taux d'évolution entre les indices se calcule par simple soustraction lorsque l'indice simple initial est 100.

§ 4. PETITS TAUX D'EVOLUTION

a. Taux global

Remarque :

Si un taux d'évolution t est proche de 0, alors le taux global de deux évolutions successives de taux t est proche de $2t$.
Autrement dit, si $t \approx 0$, alors :

- $\boxed{(1 + t)^2 \approx 1 + 2t}$.

Exemple :

- On considère deux hausses successives de taux $t = 1{,}2$ %.

On a : $t = 0{,}012 \approx 0$ et $2t = 2 \times 0{,}012 = 0{,}024$.
La hausse globale est proche de 2,4 %.

b. Taux moyen

Remarque :

Si un taux global t de deux évolutions successives est proche de 0, alors le taux d'évolution moyen est proche de $\frac{t}{2}$.

Autrement dit, si $t \approx 0$, alors :

- $\boxed{\sqrt{1 + t} \approx 1 + \frac{t}{2}}$.

Exemple :

- En deux mois, le taux d'inflation est $t = 0{,}4$ %.

On a : $t = 0{,}004 \approx 0$ et $\frac{t}{2} = \frac{0{,}004}{2} = 0{,}002$.

Le taux mensuel moyen d'inflation est proche de 0,2 %.

c. Evolution réciproque

Remarque :

Si un taux d'évolution t de y_1 à y_2 est proche de 0, alors le taux de l'évolution réciproque de y_2 à y_1 est proche de $-t$.
Autrement dit, si $t \approx 0$, alors :

- $\boxed{\frac{1}{1 + t} \approx 1 - t}$.

Exemple :

- Le taux d'évolution de 100 à 101,1 est 1,1 %.

On a : $t = 0{,}011 \approx 0$ et $-t = -0{,}011$.
Le taux d'évolution de 101,1 à 100 est proche de $-1{,}1$ %.

§ 1. SUITES ARITHMETIQUES

a. Suite arithmétique

Définition :

On considère un réel r.
Une suite u est une **suite arithmétique** de **raison** r lorsque pour tout $n \in \mathbf{N}$:

- $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$.

Autrement dit, la différence entre deux termes consécutifs est constante, indépendamment de n.

Exemple :

- Economies

Le 1er janvier 2010, j'économise 100 €. Puis chaque 1er jour des mois suivants, j'économise 15 €.
On note u_n les économies au bout de n mois depuis le 1er janvier 2010.

Puisque chaque 1er jour du mois, j'économise 15 €, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$: $u_{n+1} = u_n + 15$.
Par définition, la suite u des économies est une suite arithmétique de premier terme 100 et de raison 15.

- $u_1 = u_0 + 15 = 100 + 15 = 115$;
- $u_2 = u_1 + 15 = 115 + 15 = 130$;
- $u_3 = u_2 + 15 = 130 + 15 = 145$ etc...

b. Formule explicite de u_n en fonction de n

Propriété :

Si u est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$:

- $\boxed{u_n = u_0 + n \times r}$.

Exemple :

- Economies

La suite u est une suite arithmétique de premier terme 100 et de raison 15 donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$u_n = u_0 + n \times r = 100 + 15n$.
On a par exemple : $u_{12} = 100 + 15 \times 12 = 280$.
Ainsi, au bout d'un an, j'ai économisé 280 €.

Conséquence :

Si u est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $p \in \mathbf{N}$:

- $\boxed{u_n = u_p + (n - p) \times r}$.

Exemple :

- Economies

La suite u est une suite arithmétique de raison 15 donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $p \in \mathbf{N}$:
$u_n = u_p + 15 \times (n - p)$.
En particulier, on a par exemple : $u_{24} = u_{12} + 15 \times 12 = 280 + 15 \times 12 = 460$.
Ainsi, au bout de deux ans, j'ai économisé 460 €.

c. Sens de variation d'une suite arithmétique

Propriété :

Soit u une suite arithmétique de raison r.

- Si $r < 0$, alors la suite u est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite u est constante.
- Si $r > 0$, alors la suite u est strictement croissante.

d. Représentation graphique d'une suite arithmétique

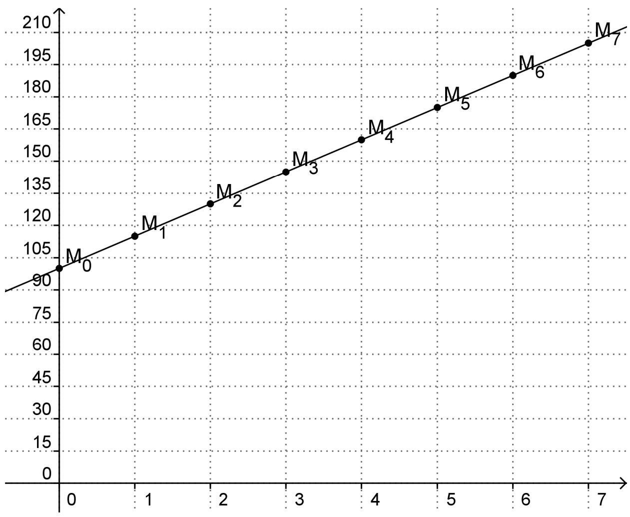
Propriété :

Si u est une suite arithmétique, alors l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$ est situé sur une droite.

Exemple :

- Economies

Rang n	0	1	2	3	4	5	6	7
Terme u_n	100	115	130	145	160	175	190	205



e. Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété :

Si u est une suite arithmétique, alors la somme S de p termes consécutifs dont le premier terme est a et le dernier est b est donnée par :

- $\boxed{S = p \times \frac{a+b}{2}}$.

Exercice :

Calculer S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19.
La somme S est la somme de 10 termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 2 dont le premier terme est 1 et le dernier est 19 donc :

On a : $S = p \times \frac{a+b}{2} = 10 \times \frac{1+19}{2} = 10 \times \frac{20}{2} = 10 \times 10 = 100$.

§ 2. SUITES GEOMETRIQUES

a. Définition d'une suite géométrique

Définition :

On considère un réel $q > 0$.
Une suite u est une **suite géométrique** de **raison** q lorsque pour tout $n \in \mathbf{N}$:

- $\boxed{u_{n+1} = q \times u_n}$.

Autrement dit, le rapport entre deux termes consécutifs est constant, indépendamment de n.

Exemple :

- Population

Le 1er janvier 2000, la population d'une ville nouvelle est de 10 000 habitants. La population augmente régulièrement de 5 % par an.
On note u_n la population de la ville au bout de n années depuis le 1er janvier 2000.

Puisque chaque année, la population augmente de 5 %, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$: $u_{n+1} = 1{,}05 \times u_n$.
Par définition, la suite u de la population de la ville est une suite géométrique de premier terme 10 000 et de raison 1,05.

- $u_1 = 1{,}05 \times u_0 = 1{,}05 \times 10\,000 = 10\,500$;
- $u_2 = 1{,}05 \times u_1 = 1{,}05 \times 10\,500 = 11\,025$;
- $u_3 = 1{,}05 \times u_2 = 1{,}05 \times 11\,025 \approx 11\,576$ etc...

b. Formule explicite de u_n en fonction de n

Propriété :

Si u est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

- $\boxed{u_n = q^n \times u_0}$.

Exemple :

- Population

La suite u est une suite géométrique de premier terme 10 000 et de raison 1,05 donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$u_n = q^n \times u_0 = 1{,}05^n \times 10\,000$.
On a par exemple : $u_{10} = 1{,}05^{10} \times 10\,000 \approx 16\,289$.
Ainsi, en 2010, la population de la ville est de 16 289 habitants.

Conséquence :

Si u est une suite géométrique de raison q, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $p \in \mathbf{N}$:

- $\boxed{u_n = q^{n-p} \times u_p}$.

Exemple :

- Economies

La suite u est une suite géométrique de raison 1,05 donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $p \in \mathbf{N}$:
$u_n = q^{n-p} \times u_p$.
En particulier, on a par exemple : $u_{20} = 1{,}05^{10} \times u_{10} = 1{,}05^{10} \times 16\,289 \approx 26\,533$.
Ainsi, en 2010, la population de la ville est de 26 533 habitants.

c. Sens de variation d'une suite géométrique

Propriété :

Soit u une suite géométrique positive de raison q.

- Si $0 < q < 1$, alors la suite u est strictement décroissante.
- Si $q = 1$, alors la suite u est constante.
- Si $q > 1$, alors la suite u est strictement croissante.

d. Représentation graphique d'une suite géométrique

Propriété :

Si u est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$ est situé sur une courbe exponentielle.

Exemple :

- Population

Rang n	0	1	2	5	10	20
Terme u_n	10 000	10 500	11 025	12 763	16 289	26 533

e. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété :

Si u est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors la somme S de p termes consécutifs dont le premier terme est a donnée par :

- $\boxed{S = a \times \dfrac{1 - q^p}{1 - q}}$.

Exercice :

Calculer S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64.
La somme S est la somme de 7 termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2 dont le premier terme est 1 donc :
On a : $S = a \times \dfrac{1 - q^p}{1 - q} = 1 \times \dfrac{1 - 2^7}{1 - 2} = 1 \times \dfrac{1 - 128}{-1} = 127$.

§ 3. APPLICATIONS ECONOMIQUES

a. Intérêts simples

Exercice :

Un capital de 1 000 € est placé à intérêts simples au taux annuel i = 7,5 %. On note C_n la valeur acquise par le capital au bout de n années.

i. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$: $C_n = 1\,000 + 75n$.
ii. Calculer la valeur acquise par le capital au bout de 10 ans.
iii. Calculer le taux mensuel t proportionnel au taux annuel.
iv. Calculer la valeur acquise par le capital au bout de 4 mois.

i. Au bout de chaque année, les intérêts produits I sont donnés par : $I = i \times C_0 = 0{,}075 \times 1\,000 = 75$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$: $C_{n+1} = C_n + I = C_n + 75$.
Par définition, la suite C est une suite arithmétique de premier terme 1 000 et de raison 75.
Par conséquent, pour tout $n \in \mathbf{N}$: $C_n = 1\,000 + 75n$.

ii. On cherche C_{10}. On a : $C_{10} = 1\,000 + 75 \times 10 = 1\,750$.
Au bout de 10 ans, la valeur acquise par le capital est 1 750 €.

iii. Par définition, on a : $t = \dfrac{i}{12} = \dfrac{0{,}075}{12} = 0{,}00625$.
Le taux mensuel t proportionnel au taux annuel i est 0,0625 %.

iv. Au bout de 4 mois, les intérêts produits I sont donnés par : $I = 4 \times t \times C_0 = 25$ €.
Au bout de 4 mois, la valeur acquise par le capital C est donnée par $C = C_0 + I = 1\,025$ €.

b. Intérêts composés

Exercice :

Un organisme propose un placement à intérêts composés au taux annuel i = 4 %. On note C_n la valeur acquise par le capital au bout de n années.

i. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$: $C_n = 1{,}04^n \times C_0$.
ii. Calculer la valeur acquise par un capital de 1 000 € au bout de 10 ans.
iii. Calculer la valeur actuelle d'un capital de 2 000 € dans 10 ans.
iv. Calculer le taux semestriel t équivalent au taux annuel.

i. Au bout de n + 1 année, les intérêts produits I_{n+1} sont donnés par : $I_{n+1} = i \times C_n = 0{,}04 \times C_n$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$: $C_{n+1} = C_n + I_{n+1} = C_n + 0{,}04 \times C_n = 1{,}04 \times C_n$.
Autrement dit, la suite C est une suite géométrique de premier terme C_0 et de raison $q = 1{,}04$.
Par conséquent, pour tout $n \in \mathbf{N}$: $C_n = 1{,}04^n \times C_0$.

ii. On cherche C_{10} sachant que $C_0 = 1\,000$. On a : $C_{10} = 1{,}04^{10} \times C_0 = 1{,}04^{10} \times 1\,000 \approx 1\,480$.
Au bout de 10 ans, la valeur acquise par le capital est environ 1480 €.

iii. On cherche C_0 sachant que $C_{10} = 2\,000$. On a : $C_0 = \dfrac{C_{10}}{1{,}04^{10}} = \dfrac{2000}{1{,}04^{10}} \approx 1351$.
La valeur actuelle d'un capital de 2 000 € dans 10 ans est environ 1351 €.

iv. On a : $(1 + t)^2 = 1 + i \Leftrightarrow 1 + t = \sqrt{1 + i} \Leftrightarrow t = \sqrt{1 + i} - 1 = \sqrt{1{,}04} - 1 \approx 0{,}0198$.
Le taux semestriel équivalent au taux annuel est environ 1,98 %.

c. Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes

Définition :

La valeur actuelle E d'une suite de n annuités constantes a_1 ; ... ; a_n au taux d'intérêt annuel i est la somme des valeurs actuelles de chaque annuité.
Autrement dit :

- $\boxed{E = \frac{a_1}{1+i} + \ldots + \frac{a_n}{(1+i)^n}}$.

Propriété :

Avec les notations précédentes et en notant a l'annuité constante, on a :

- $\boxed{E = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$.

Exercice :

Une entreprise souhaite anticiper un remboursement de matériel décomposé en 5 annuités de 2 000 € au taux d'intérêt annuel de 6 %.

i. Calculer à l'euro près le montant du remboursement anticipé.
ii. Quelle est l'économie réalisée ?

i. On cherche la valeur actuelle E des 5 annuités de 2000 € au taux d'intérêt annuel de 6 %.
On a : $E = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 2\,000 \times \frac{1-1{,}06^{-5}}{0{,}06} \approx 8\,425$.
Le montant du remboursement anticipé est environ 8 425 €.

ii. L'économie réalisée e est donnée par : $e = 5 \times 2000 - 8425 = 1575$ €.

d. Annuité d'un emprunt à d'annuités constantes

Remarque :

L'annuité a d'un emprunt E à n annuités constantes au taux d'intérêt annuel i est donnée par :

- $\boxed{a = E \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}}$.

Exercice :

On emprunte 200 000 € pendant 20 ans au taux d'intérêt annuel de 4 %.

i. Calculer à l'euro près le montant de l'annuité ?
ii. Calculer à l'euro près le montant de la mensualité ?
iii. Quelle est le coût total du crédit ?

i. On cherche l'annuité a d'un emprunt E de 200 000 € sur 20 ans au taux d'intérêt annuel de 4 %.
On a : $a = E \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 200\,000 \times \frac{0{,}04}{1-1{,}04^{-20}} \approx 14\,716$.
Le montant de l'annuité est environ 14 716 €.

ii. Soit m le montant de la mensualité.
On a : $m = \frac{a}{12} \approx 1\,226$.
Le montant de la mensualité est environ 1 226 €.

iii. Le coût total du crédit est donné par : $20a \approx 294\,327$ €.

§ 1. EQUATIONS DE DROITES

a. Equation d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées

Propriétés :

i. Toute droite (d) non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y = mx + p$.
ii. Réciproquement, l'équation $y = mx + p$ est l'équation d'une droite (d) non parallèle à l'axe des ordonnées.
iii. Pour qu'un point M appartienne à la droite (d), il faut et il suffit que ses coordonnées (x_M ; y_M) vérifient l'équation $y = mx + p$.

Vocabulaire :

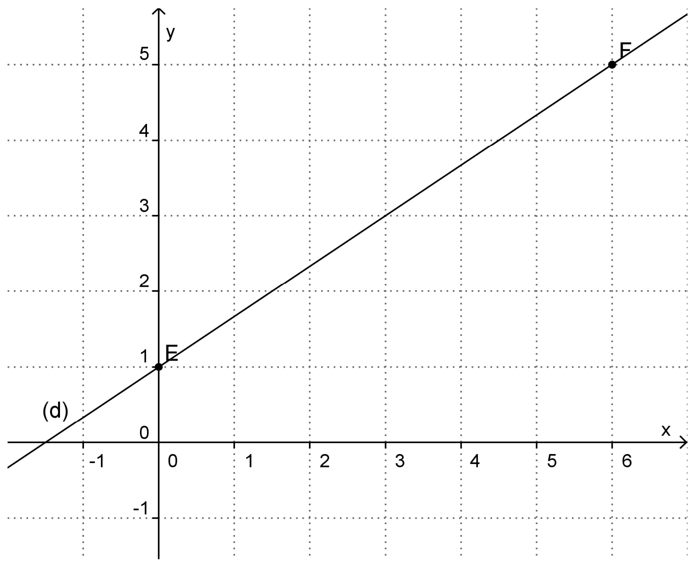
i. L'équation $y = mx + p$ est appelée l'**équation réduite** de (d).
ii. Le nombre m est appelé le **coefficient directeur** de (d).
iii. Le nombre p est appelé l'**ordonnée à l'origine** de (d).

Exemple :

- Soit (d) : $y = \frac{2}{3}x + 1$.

Pour tracer (d), on choisit 2 valeurs pour x et on calcule les valeurs correspondantes pour y :

x	0	6
$y = \frac{2}{3}x + 1$	1	5



Exercice :

Déterminer l'équation réduite $y = mx + p$ de la droite passant par les points A(1 ; 5) et B(6 ; 2).

On a : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-5}{6-1} = -\frac{3}{5}$.

On a par exemple A ∈ (d). D'où : $y_A = mx_A + p \Leftrightarrow 5 = -\frac{3}{5} \times 1 + p \Leftrightarrow 5 = -\frac{3}{5} + p \Leftrightarrow p = 5 + \frac{3}{5} = \frac{28}{5}$.

Conclusion : l'équation réduite de (d) est $y = -\frac{3}{5}x + \frac{28}{5}$.

b. Equation cartésienne d'une droite

Propriétés :

i. Toute droite (d) a une équation de la forme $ux + vy + w = 0$ avec $(u ; v) \neq (0 ; 0)$.
ii. Réciproquement, l'équation $ux + vy + w = 0$ avec $(u ; v) \neq (0 ; 0)$ est l'équation d'une droite (d).

Définition :

L'équation $ux + vy + w = 0$ est appelée une **équation cartésienne** de (d).

Remarque :

Dans le cas particulier où $v = 0$, on a : $ux + w = 0 \Leftrightarrow ux = -w \Leftrightarrow x = -\dfrac{w}{u}$.

La droite (d) est la droite parallèle à l'axe des ordonnées formée des points M d'abscisse $x_M = -\dfrac{w}{u}$.

Exemple :

- On a : $3x + 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow 2y = -3x + 5 \Leftrightarrow y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}$.

L'équation $3x + 2y - 5 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (d) : $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}$.

c. Parallélisme de droites

Propriété :

Pour que deux droites (d) et (d') d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ soient parallèles, il faut et il suffit que $m = m'$.
Illustration.

Exemple :

- Soit (d) et (d') les droites d'équations respectives $3x + 2y - 1 = 0$ et $5x + \dfrac{10}{3}y + 10 = 0$.

d. Résolution d'un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues

Exercice :

i. Résoudre algébriquement le système (S) : $\begin{cases} 3x - y = 5 : (1) \\ 2x + 3y = 7 : (2) \end{cases}$.

ii. Retrouver graphiquement la solution du système (S).

i. Dans (1), on exprime y en fonction de x : (1) : $y = 3x - 5$.

Dans (2), on remplace y par $3x - 5$: (2) : $2x + 3(3x - 5) = 7 \Leftrightarrow 11x - 15 = 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{22}{11} = 2$.

Dans (1), on remplace x par 2 : (1) : $y = 3 \times 2 - 5 = 1$.
Vérification : (1) : $3 \times 2 - 1 = 5$ et (2) : $2 \times 2 + 3 \times 1 = 7$.
Conclusion : le couple $(2 ; 1)$ est la solution de (S).

ii. Les équations (1) et (2) sont les équations cartésiennes de 2 droites (d_1) et (d_2).
Soit $P(x ; y)$ le point d'intersection de (d_1) et (d_2).
$P \in (d_1)$ équivaut à $(x ; y)$ vérifie l'équation (1).
$P \in (d_2)$ équivaut à $(x ; y)$ vérifie l'équation (2).
Autrement dit, $P \in (d_1) \cap (d_2)$ équivaut à $(x ; y)$ vérifie le système (S).
Pour trouver la solution du système (S), il faut et il suffit de tracer les droites (d_1) et (d_2) et de lire les coordonnées du point d'intersection de (d_1) et (d_2).

§ 2. SYSTEMES LINEAIRES D' INEQUATIONS A 2 INCONNUES

a. Résolution graphique d'une inéquation à 2 inconnues

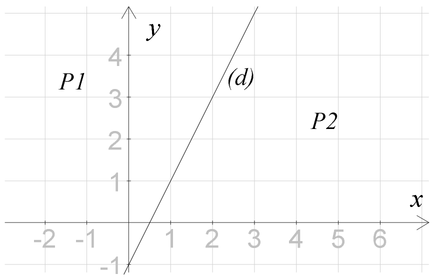
Propriétés :

i. Les solutions de l'inéquation (I) : $y > ax + b$ sont les coordonnées des points du demi-plan situé « au-dessus » de la droite (d) : $y = ax + b$.
ii. Les solutions de l'inéquation (I) : $y < ax + b$ sont les coordonnées des points du demi-plan situé « au-dessous » de la droite (d) : $y = ax + b$.

Exemple :

- Résoudre graphiquement l'inéquation (I) : $2x - y < 1$.

La droite (d) sépare le plan en 2 demi-plans (P_1) et (P_2).
On a (I) : $y > 2x - 1$ donc les solutions de l'inéquation (I) sont les coordonnées des points du demi-plan (P_1) situé « au-dessus » de la droite (d) : $y = 2x - 1$.



On s'assure de la cohérence des solutions sur le point O(0 ; 0) :
D'un côté O $\in$ P, d'un autre côté (0 ; 0) est solution de (I).

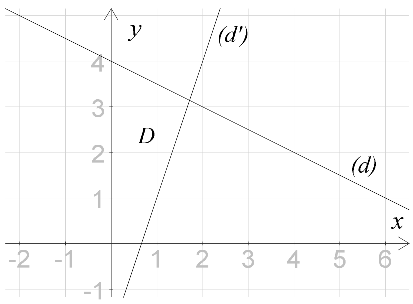
Faire une remarque équivalente concernant les solutions de $ax + by + c > 0$.

b. Résolution graphique d'un système d'inéquations à 2 inconnues

Exercice :

Résoudre graphiquement le système (S) : $\begin{cases} x \geq 0 : (1) \\ y \geq 0 : (2) \\ x + 2y \leq 8 : (3) \\ 3x - y - 2 \leq 0 : (4) \end{cases}$.

De (1) et (2), on déduit que les solutions sont des points à coordonnées positives.
De (3), on déduit que les solutions sont situées « au-dessous » de la droite (d) : $y = -\frac{1}{2}x + 4$.
De (3), on déduit que les solutions sont situées « au-dessus » de la droite (d') : $y = 3x - 2$.
Les solutions du système sont les coordonnées des points du domaine D délimité par (Ox), (Oy), (d) et (d').



Exercice :

Une entreprise de travaux public possède 10 camions de charge utile 3 tonnes et 8 camions de charge utile 5 tonnes.
Cette entreprise doit effectuer un transport de gravier dont la quantité est comprise entre 50 et 60 tonnes.
Soit x le nombre de camions « 3 tonnes » utilisés et y le nombre de camions « 5 tonnes » utilisés.

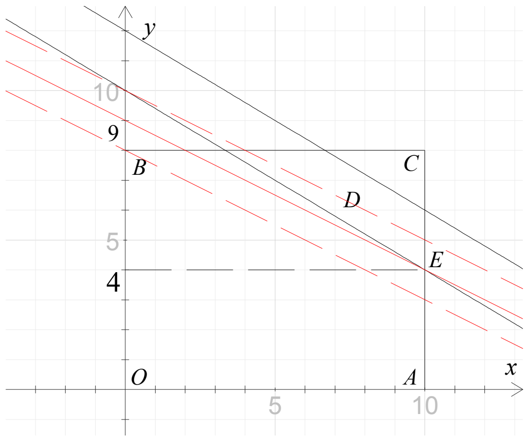
i. Montrer que les couples $(x ; y)$ sont solutions du système (S) : $\begin{cases} 0 \le x \le 10 \ (1) \\ 0 \le y \le 8 \ (2) \\ 50 \le 3x + 5y \le 60 \ (3) \end{cases}$.

ii. Représenter dans un repère l'ensemble D des points M$(x ; y)$ tels que $(x ; y)$ soient solutions de (S).

iii. Les frais de transport sur un camion « 3 tonnes » s'élèvent à 100 euros et sur un camion « 5 tonnes » à 200 euros. On note F le total des frais de transport.
Exprimer F en fonction de x et de y.
Trouver le couple $(x_0 ; y_0)$ pour lequel le coût du transport est minimal. Calculer le coût minimal.

i. D'après la première phrase de l'énoncé, on a : $0 \le x \le 10$ et $0 \le y \le 8$.
D'après la deuxième phrase de l'énoncé, on a : $50 \le 3x + 5y \le 60$.

ii. De (1) et (2), on déduit que les solutions de (S) sont représentées par des points à l'intérieur du rectangle *OACB*.
De (3), on déduit que les solutions de (S) sont représentées par des points situés « au-dessus » de la droite d'équation $y = -\frac{3}{5}x + 10$ et « au-dessous » de la droite d'équation $y = -\frac{3}{5}x + 12$.



Les solutions du système (S) sont les coordonnées des points du domaine *D* délimité par les droites d'équations $y = 8$; $x = 10$; $y = -\frac{3}{5}x + 10$ et $y = -\frac{3}{5}x + 12$.

iii. On a $F = 100x + 200y$.
On en déduit $y = -\frac{1}{2}x + \frac{F}{200}$.
Les droites d'équations $y = -\frac{1}{2}x + \frac{F}{200}$ sont parallèles de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ et d'ordonnées à l'origine $\frac{F}{200}$.
Le coût minimal s'obtient en considérant parmi la famille de droites d'équations $y = -\frac{1}{2}x + \frac{F}{200}$ celle ayant la plus petite ordonnée à l'origine $\frac{F}{200}$ et passant par le domaine *D*.
Graphiquement, la droite qui convient est celle passant par le point $E(10 ; 4)$.
Par conséquent, le couple pour lequel le coût du transport est minimal est (10 ; 4).
On a alors $F = 100 \times 10 + 200 \times 4 = 1800$.

§ 1. SERIES STATISTIQUES SIMPLES

a. Série de notes

Exercice :

On a relevé, pour les élèves d'une classe de terminale STG, leur note à un examen et on a obtenu la série statistique suivante :

Note x_i	6	8	9	10	11	12	15	18
Effectif n_i	1	2	3	6	4	2	1	1

i. Quel est l'effectif total n ?
ii. Calculer la fréquence f_i de chaque note.
iii. Calculer la moyenne $\overline{x}$ de la série.
iv. Calculer la médiane Me de la série.
v. Calculer le premier quartile Q_1 et le troisième quartile Q_3 de la série.
vi. Représenter la série par un diagramme en boîtes.
vii. Calculer la variance V et l'écart type σ de la série.
viii. Représenter la série par un diagramme en bâtons.
ix. Calculer le pourcentage de valeur appartenant à l'intervalle [Me – σ ; Me + σ].

b. Série classée

Exercice :

On a relevé, pour les élèves d'une autre classe de terminale STG, leurs tailles et on a obtenu les résultats suivants (en cm) :

Taille	[150 ; 160[	[160 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[	[180 ; 200[
Effectif	2	6	6	4	2

i. Quel est l'effectif total n ?
ii. Calculer la fréquence f_i de chaque classe de tailles.
iii. Estimer la moyenne $\overline{x}$ de la série.
iv. Représenter la courbe des effectifs cumulés croissants de la série.
v. En déduire une valeur approchée de la médiane Me de la série.
vi. Représenter la série par un histogramme.

§ 2. SERIES STATISTIQUES DOUBLES

a. Série statistique double

Définition :

Une **série statistique double** est le résultat de l'étude statistique de deux caractères X et Y sur une population.

En notant x_1 ; ... ; x_n les n valeurs du caractère X et y_1 ; ... ; y_n les n valeurs du caractère Y, on obtient la série statistique double :

Valeur de X	x_1	...	x_i	...	x_n
Valeur de Y	y_1	...	y_i	...	y_n

Exemple :

- « Série de notes »

Les notes suivantes sont celles obtenues par cinq élèves d'une même classe de terminale STT au baccalauréat et à un concours.

Note x_i au baccalauréat	7	10	11	13	16
Note y_i au concours	8	9	11	12	13

b. Nuage de points

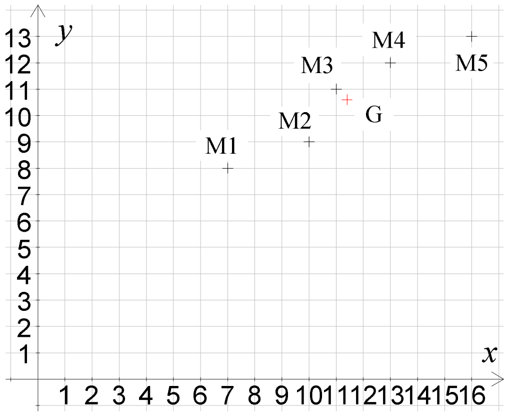
Définition :

Dans un repère orthogonal, l'ensemble des points M_i de coordonnées $(x_i ; y_i)$ est appelé le **nuage de points** associé à la série statistique double à deux variables X et Y.

Exemple :

- « Série de notes »

Le nuage de points de la série statistique double est formé des points $M_1(7 ; 8)$; $M_2(10 ; 9)$; $M_3(11 ; 11)$; $M_4(13 ; 12)$ et $M_5(16 ; 13)$.



c. Point moyen

Définition :

On note $\overline{x}$ la moyenne des n valeurs de la variable X et $\overline{y}$ la moyenne des n valeurs de la variable Y.

Le point G de coordonnées $(\overline{x} ; \overline{y})$ est appelé le **point moyen** du nuage de points associé à la série statistique double à deux variables X et Y.

Exemple :

- « Série de notes »

On a : $\overline{x} = \dfrac{7 + 10 + 11 + 13 + 16}{5} = 11{,}4$.

On a : $\overline{y} = \dfrac{8 + 9 + 11 + 12 + 13}{5} = 10{,}6$.

Le point moyen G est le points de coordonnées (11,4 ; 10,6).

d. Ajustement affine

Définition :

Lorsque le nuage de points d'une série statistique double a une forme « allongée », on peut tracer une droite (ou plusieurs) qui passe « le plus près possible » des points du nuage.
On dit qu'une telle droite réalise un **ajustement affine** du nuage de points.

Remarque :

Plusieurs méthodes d'ajustement affine d'un nuage de points existent. Généralement, une droite d'ajustement affine passe par le point moyen du nuage de points.

Exemple :

- « Série de notes »

Le nuage de points de la série statistique double a une forme « allongée ». On peut réaliser un ajustement affine du nuage de points par une droite (d).
On choisit (d) : $y = 0{,}59x + 3{,}84$.

§ 1. NOMBRE DERIVE

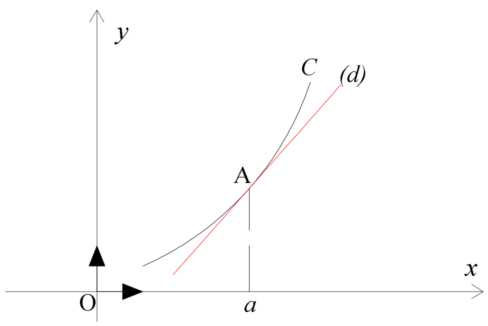
a. Tangente à une courbe en un point

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle **I** de **R**.

On note C la courbe représentative de f dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et on considère un point A de C d'abscisse a.

La **tangente à la courbe *C* en A** est la droite (d), parmi toutes celles passant par A, qui « approche » le mieux la courbe C sur des intervalles de plus en plus petits contenant a.



b. Nombre dérivé d'une fonction en un réel

Définition :

Avec les notations précédentes.
Le **nombre dérivé de *f* en *a***, noté $f'(a)$, est le coefficient directeur, lorsqu'il existe, de la tangente à la courbe C en A.

Exemple :

- Soit f la fonction définie sur [0 ; 2] par $f(x) = x^2$.

On a : $f'(1) = 2$.

c. Equation de la tangente à une courbe en un point

Propriété :

Avec les notations précédentes.
L'équation de la tangente (d) à la courbe C en A est donnée par : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exemple :

- Soit f la fonction définie sur [0 ; 2] par $f(x) = x^2$.

La tangente à la courbe C au point A d'abscisse 1 est la droite (d) d'équation réduite : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.
On a : $f'(1) = 2$ et $f(1) = 1$.
Donc (d) : $y = 2(x - 1) + 1$.
Et (d) : $y = 2x - 1$.

§ 2. CALCUL DE DERIVEES

a. Fonctions dérivée

Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle **I** de **R**.

i. On dit que f est **dérivable** sur **I** lorsque, pour tout $a \in$ **I**, le nombre dérivé $f\,'(a)$ existe.

ii. Lorsque f est dérivable sur **I**, la fonction $f\,'$, qui, à $x \in$ **I**, associe le nombre dérivé $f\,'(x)$, s'appelle la **fonction dérivée** de f.

Exemple :

- Soit f la fonction définie sur [0 ; 2] par $f(x) = x^2$.

La fonction f est dérivable sur [0 ; 2].
La fonction dérivée $f\,'$ est définie pour tout $x \in$ [0 ; 2] par $f\,'(x) = 2x$.

b. Dérivée des fonctions usuelles

Propriété :

Le nombre k désigne une constante réelle et $n \in$ **N***.

fonction	dérivée	commentaire
k	0	sur **R**
x	0	sur **R**
$ax + b$	a	sur **R**
x^2	$2x$	sur **R**
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	sur **R***
x^n	nx^{n-1}	sur **R**
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	sur $\mathbf{R}^{+*}$

Exemple :

- Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = x^3$.

La fonction f est dérivable sur **R**.
La fonction dérivée $f\,'$ est définie pour tout $x \in$ **R** par $f\,'(x) = 3x^2$.

c. Dérivées et opérations

Propriété :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle **I** de **R** et k une constante réelle.

fonction	dérivée	commentaire
ku	ku'	sur **I**
$u + v$	$u' + v'$	sur **I**
uv	$u'v + uv'$	sur **I**
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	sur **I** si $v(x) \neq 0$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	sur **I** si $v(x) \neq 0$

Exemples :

- Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = 5x^3$.

Le nombre $f(x)$ est de la forme $k \times u(x)$ avec $k = 5$ et $u(x) = x^3$.
La fonction f est dérivable sur **R**.
Pour tout $x \in$ **R**, $f'(x) = k \times u'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$.

- Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = x^3 + 5x + 9$.

Le nombre $f(x)$ est de la forme $u(x) + v(x) + w(x)$ avec $u(x) = x^3$, $v(x) = 5x$ et $w(x) = 9$.
La fonction f est dérivable sur **R**.
Pour tout $x \in$ **R**, $f'(x) = u'(x) + v'(x) + w'(x) = 3x^2 + 5 + 0 = 3x^2 + 5$.

- Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = (2x + 3)(5x - 7)$.

Le nombre $f(x)$ est de la forme $u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = 2x + 3$, $v(x) = 5x - 7$.
La fonction f est dérivable sur **R**.
Pour tout $x \in$ **R**, $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2(5x - 7) + (2x + 3) \times 5 = 10x - 14 + 10x + 15 = 20x + 1$.

- Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Le nombre $f(x)$ est de la forme $\frac{1}{v(x)}$ avec $v(x) = x^2 + 1$.
La fonction f est dérivable sur **R**.
Pour tout $x \in$ **R**, $f'(x) = \frac{-v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$.

- Soit f la fonction définie sur $[1 ; 10]$ par $f(x) = \frac{3x - 1}{2x}$.

Le nombre $f(x)$ est de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 3x - 1$ et $v(x) = 2x$.
La fonction f est dérivable sur $[1 ; 10]$.
Pour tout $x \in [1 ; 10]$, $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{3 \times 2x - (3x - 1) \times 2}{(2x)^2} = \frac{6x - 6x + 2}{4x^2} = \frac{1}{2x^2}$.

d. Dérivées et composition

Définition :

On considère une fonction u définie sur un intervalle I et une fonction φ définie sur un intervalle J tel que, pour tout $x \in$ I, $u(x) \in$ J.

La fonction f définie sur I par $f(x) = \varphi(u(x))$, notée $\varphi(u)$, s'appelle la fonction composée de u suivie de φ.
Schématiquement : $f : x \mapsto u(x) \mapsto \varphi(u(x))$.

Exemples :

i. Soit u la fonction définie sur [0 ; 1] par $u(x) = x + 1$ et φ la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par $\varphi(X) = \sqrt{X}$.
La fonction composée $f = \varphi(u)$ est définie sur [0 ; 1] par $f(x) = \varphi(u(x)) = \sqrt{x+1}$.
Schématiquement : $f : x \mapsto x + 1 \mapsto \sqrt{x+1}$.

ii. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R} - \{1\}$ par $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
On a : $g = \varphi(u)$ avec u définie sur $\mathbf{R} - \{1\}$ par $u(x) = x - 1$ et φ définie sur $\mathbf{R}^*$ par $\varphi(X) = \dfrac{1}{X}$.
Schématiquement : $f : x \mapsto x - 1 \mapsto \dfrac{1}{x-1}$.

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle **I** et φ une fonction dérivable sur un intervalle **J** tel que, pour tout $x \in$ **I**, $u(x) \in$ **J**.
La fonction composée $f = \varphi(u)$ est dérivable sur **I** et, pour tout $x \in$ **I** : $(\varphi(u))'(x) = u'(x) \times \varphi'(u(x))$.

Conséquence :

Soit u une fonction dérivable sur **I** et $n \in \mathbf{N}^*$.
La fonction f définie par $f(x) = [u(x)]^n$ est dérivable sur **I** et pour tout $x \in$ **I**, $f'(x) = nu'(x) \times [u(x)]^{n-1}$.

Exemple :

- Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur **R** par $f(x) = (4x^3 - 2x + 5)^3$.

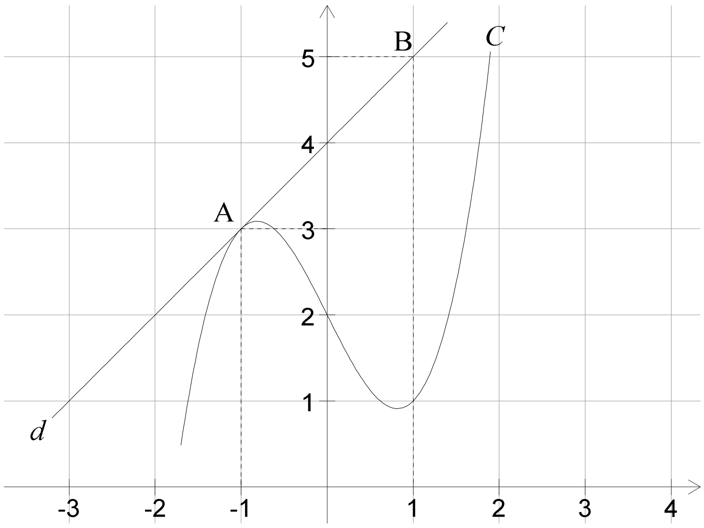
Le nombre $f(x)$ est de la forme $[u(x)]^n$ avec $u(x) = 4x^3 - 2x + 5$ et $n = 3$.
Pour tout $x \in$ **R**, $f'(x) = 3u'(x)[u(x)]^2 = 3(12x^2 - 2)(4x^3 - 2x + 5)^2$.

§ 3. LECTURE GRAPHIQUE

Exercice :

Sur le graphique :
- la courbe C représente la fonction f définie sur **R** par $f(x) = x^3 - 2x + 2$.
- la droite d est la tangente à la courbe C au point A d'abscisse – 1.

i. Lire graphiquement les nombres $f(-1)$ et $f'(-1)$.
ii. Retrouver les résultats précédents par le calcul.
Donner l'équation réduite de la droite d.



§ 1. SENS DE VARIATIONS D'UNE FONCTION

a. Signe de la dérivée et monotonie

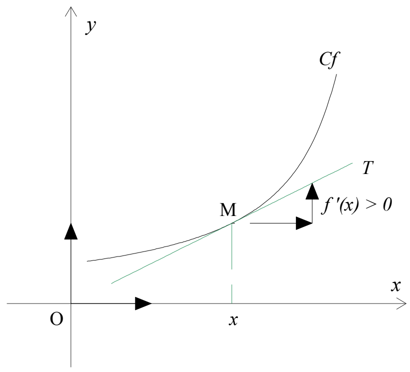
Propriété :

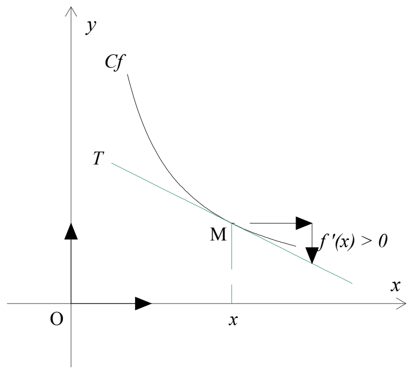
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **I** de **R**.

i. Si, pour tout $x \in$ **I**, $f\,'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur **I**.

ii. Si, pour tout $x \in$ **I**, $f\,'(x) = 0$, alors f est constante sur **I**.

iii. Si, pour tout $x \in$ **I**, $f\,'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur **I**.





- $f\,'(x) \geq 0$ et f est croissante sur **I**.
- $f\,'(x) \leq 0$ et f est décroissante sur **I**.

Exemple :

- Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = x^2 + 1$.

La fonction f est dérivable sur **R** et pour tout $x \in$ **R** : $f\,'(x) = 2x$.
Pour tout $x \geq 0$, $f\,'(x) \geq 0$ donc la fonction f est croissante sur $]0 ; +\infty[$.
Pour tout $x \leq 0$, $f\,'(x) \leq 0$ donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty ; 0[$.

b. Sens de variations et tableau de variations

Définition :

Etudier le **sens de variations** d'une fonction consiste à découper son ensemble de définition en une succession d'intervalles les plus larges possibles sur lesquels la fonction est monotone.

Méthode :

Pour étudier le sens de variations d'une fonction définie sur un intervalle **I**, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée sur **I**.
Un **tableau de variations** permet alors de résumer le sens de variation de la fonction.

Exemple :

- Soit f la fonction définie sur $[0 ; 4]$ par $f(x) = 2x^2 - 12x$.

La fonction f est dérivable sur $[0 ; 4]$ et pour tout $x \in [0 ; 4]$, $f\,'(x) = 4x - 12$.
On a : $4x - 12 = 0$ lorsque $x = 3$.

x	0		3		4
$f\,'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	0	↘	– 18	↗	– 16

c. Etude du sens de variations d'une fonction polynôme

Exercice :

- Soit f la fonction définie sur $[-2 ; 4]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Etudier le sens de variation de f sur $[-2 ; 4]$.

La fonction f est dérivable sur $[-2 ; 4]$ et pour tout $x \in [-2 ; 4]$, $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.
On a : $3x = 0$ lorsque $x = 0$.
On a : $x - 2 = 0$ lorsque $x = 2$.

x	-2		0		2		4
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-18	↗	2	↘	-2	↗	18

d. Etude du sens de variations d'une fonction rationnelle

Exercice :

- Soit f la fonction définie sur $[0 ; 4]$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$.

Etudier le sens de variation de f sur $[0 ; 4]$.

On a : $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 2x + 3$ et $v(x) = x + 1$.

La fonction f est dérivable sur $[0 ; 4]$.

Pour tout $x \in [0 ; 4]$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$.

Pour tout $x \in [0 ; 4]$, $f'(x) = \dfrac{2(x+1) - (2x+3) \times 1}{(x+1)^2}$.

Pour tout $x \in [0 ; 4]$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$.

Pour tout $x \in [0 ; 4]$, $\dfrac{-1}{(x+1)^2} < 0$. (Car un carré est toujours positif)

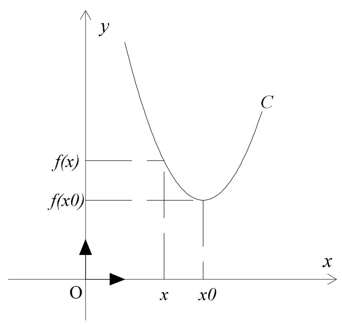
x	0		4
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	3	↘	$1,8$

§ 2. EXTREMUM D'UNE FONCTION

a. Minimum d'une fonction

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle **I** de **R** et $x_0 \in$ **I**.
Le réel $f(x_0)$ est le **minimum** de f sur **I**, atteint en x_0, lorsque, pour tout $x \in$ **I**, $f(x) \geq f(x_0)$.



Exemple :

- Soit f la fonction définie sur [0 ; 5] par $f(x) = 2x + 3$.

Pour tout $x \in [0 ; 5]$, $x \geq 0$ d'où : $2x \geq 0$ et : $2x + 3 \geq 3$.
Autrement dit, pour tout $x \in [0 ; 5]$, $f(x) \geq 3$.
En outre : $f(0) = 3$.
Par conséquent, 3 est le minimum de f sur [0 ; 5], atteint en 0.

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a ; b]$ et $c \in [a ; b]$.
Si f est décroissante sur $[a ; c]$ et croissante sur $[c ; b]$, alors $f(c)$ est le minimum de f sur $[a ; b]$.

Exercice :

- Soit f la fonction définie sur [0 ; 5] par $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

Démontrer que f admet un minimum m sur [0 ; 5] et trouver le réel $x_0 \in [0 ; 5]$ tel que $f(x_0) = m$.

On étudie le sens de variations de f sur [0 ; 5].

La fonction f est dérivable sur [0 ; 5].
Pour tout $x \in [0 ; 5]$, $f'(x) = 2x - 6$.
On a : $2x - 6 = 0$ lorsque $x = 3$.

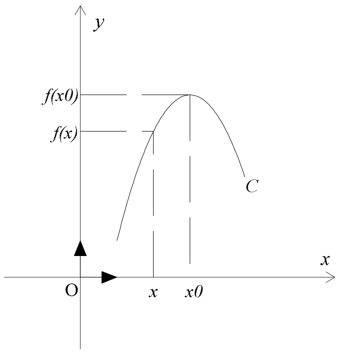
x	0		3		5
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	8	↘	– 1	↗	3

Puisque la fonction f est décroissante sur [0 ; 3] et croissante sur [3 ; 5], alors $f(3) = -1$ est le minimum de f sur [0 ; 5], atteint en 3.

b. Maximum d'une fonction

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathbf{I}$ de $\mathbf{R}$ et $x_0 \in \mathbf{I}$.
Le réel $f(x_0)$ est le **maximum** de f sur $\mathbf{I}$, atteint en x_0, lorsque, pour tout $x \in \mathbf{I}$, $f(x) \leq f(x_0)$.



Exemple :

- Soit f la fonction définie sur [0 ; 5] par $f(x) = 2x + 3$.

Pour tout $x \in [0 ; 5]$, $x \leq 5$ d'où : $2x \leq 10$ et : $2x + 3 \leq 13$.
Autrement dit, pour tout $x \in [0 ; 5]$, $f(x) \leq 13$.
En outre : $f(5) = 13$.
Par conséquent, 13 est le maximum de f sur [0 ; 5], atteint en 5.

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a ; b]$ et $c \in [a ; b]$.
Si f est croissante sur $[a ; c]$ et décroissante sur $[c ; b]$, alors $f(c)$ est le maximum de f sur $[a ; b]$.

Exercice :

- Soit f la fonction définie sur [0 ; 5] par $f(x) = 6x - x^2$.

Démontrer que f admet un maximum M sur [0 ; 5] et trouver le réel $x_0 \in [0 ; 5]$ tel que $f(x_0) = M$.

On étudie le sens de variations de f sur [0 ; 5].

La fonction f est dérivable sur [0 ; 5].
Pour tout $x \in [0 ; 5]$, $f'(x) = 6 - 2x$.
On a : $6 - 2x = 0$ lorsque $x = 3$.

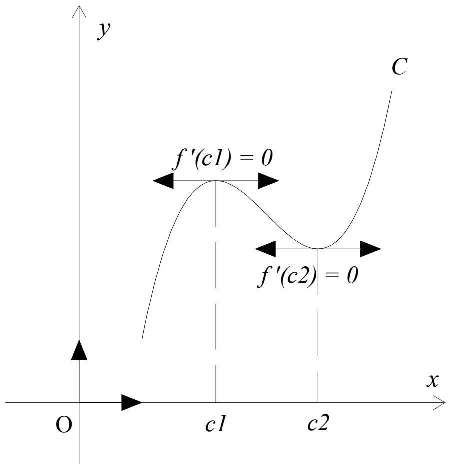
x	0		3		5
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$	0	↗	9	↘	5

Puisque la fonction f est croissante sur [0 ; 3] et décroissante sur [3 ; 5], alors $f(3) = 9$ est le maximum de f sur [0 ; 5], atteint en 3.

c. Dérivée et extremum

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a ; b]$.
Si f admet un extremum $f(c)$, atteint en c distinct de a et de b, alors $f'(c) = 0$.



Exemples :

- Soit f la fonction définie sur [0 ; 5] par $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

On a vu que – 1 était le minimum de f sur [0 ; 5], atteint en 3, et que $f'(3) = 0$.

- Soit f la fonction définie sur [0 ; 5] par $f(x) = 6x - x^2$.

On a vu que 9 était le maximum de f sur [0 ; 5], atteint en 3, et que $f'(3) = 0$.

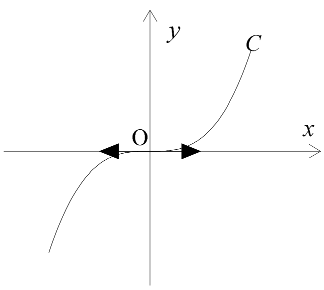
Remarque :

La réciproque n'est pas vraie.
Autrement dit, si f une fonction définie sur un intervalle $[a ; b]$ et si c est un réel de $[a ; b]$ distinct de a et de b tel que $f'(c) = 0$, alors $f(c)$ n'est pas nécessairement un extremum de f sur $[a ; b]$.

Contre-Exemple :

- Soit f la fonction définie sur [– 1; 1] par $f(x) = x^3$.

La fonction f est dérivable sur [– 1; 1] et pour tout $x \in [-1; 1]$, $f'(x) = 3x^2$.
On a : $3x^2 = 0$ lorsque $x = 0$.
Ainsi, $f'(0) = 0$ mais $f(0)$ n'est pas un extremum de f sur [– 1; 1] puisque $f(-1) < f(0) < f(1)$.

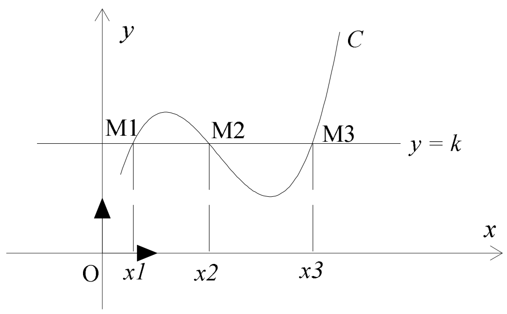


§ 3. RESOLUTION D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS

a. Résolution graphique d'une équation du type *f*(*x*) = *k*

Propriété :

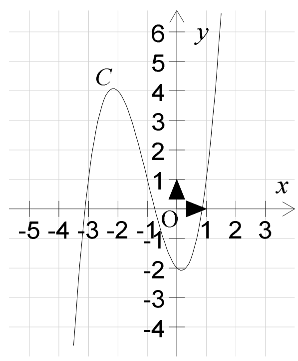
Soit f une fonction définie sur un intervalle **I** de **R**. On note C la courbe représentative de f dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et on considère un réel k.
Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe C et de la droite d'équation $y = k$.



Exercice :

La courbe C ci-contre est la représentation graphique dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction f définie sur $[-3{,}5 ; 1{,}5]$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 2$.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$.

On trace la droite (d) d'équation $y = 1$.
La courbe C et la droite (d) ont trois points communs M_1, M_2 et M_3 d'abscisses -3, -1 et 1.
Les solutions de l'équation $f(x) = 1$ sont les nombres -3, -1 et 1.



b. Résolution graphique d'une inéquation du type *f*(*x*) < *k*

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle **I** de **R**. On note C la courbe représentative de f dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et on considère un réel k.
Les solutions de l'inéquation $f(x) < k$ sont les abscisses des points de la courbe C situés en dessous de la droite d'équation $y = k$.

Exemple :

- Soit f la fonction définie sur $[-3{,}5 ; 1{,}5]$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 2$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 1$ est $[-3{,}5 ; -3[\cup]-1 ; 1[$.

§ 1. ORGANISATION DE DONNEES

Exemple :

Un groupe de 40 élèves âgés de 17 ou 18 ans comprend 25 garçons dont 15 âgés de 18 ans. On dénombre d'autre part 6 filles de 17 ans.
On veut répartir les éléments du groupe en fonction des deux critères, l'âge et le sexe. Le but de ce paragraphe est d'utiliser plusieurs techniques permettant de dénombrer toutes les parties du groupe.

a. Tableau à double entrée

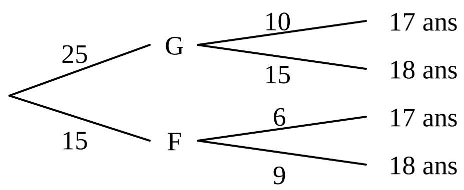
Exemple :

Par exemple, la cellule grisée contient le nombre de garçons âgés de 17 ans dans le groupe.
La ligne « total » et la colonne « total » contiennent les **effectifs marginaux**.
Par exemple, l'effectif marginal des garçons est 25 et celui des « 17 ans » est 16.

âge / sexe	17 ans	18 ans	total
garçons	10	15	25
filles	6	9	15
total	16	24	40

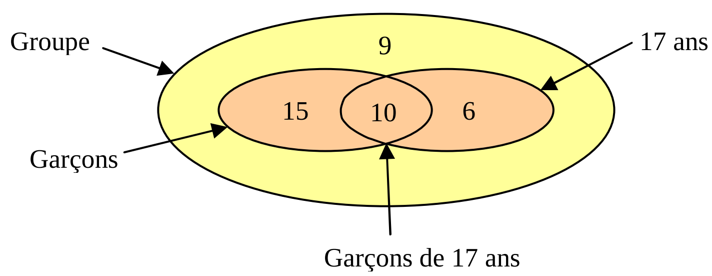
b. Arbre

Exemple :



c. Diagramme de Venn

Exemple :



§ 2. VOCABULAIRE DES PROBABILITES

a. Loi de probabilité

Définitions :

i. Le résultat d'une expérience aléatoire est appelé une **issue**, ou un **événement élémentaire**.
ii. L'ensemble des issues, noté Ω, est appelé l'**univers**.

Exemples :

- « Dé non pipé »

On lance un dé non pipé et on note le chiffre obtenu.
On a : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

- « Groupe d'élèves »

On rencontre par hasard un élève du groupe de 40 élèves précédent.
On a : $\Omega = \{ e_1 ; e_2 ; \dots ; e_{40}\}$.

Définitions :

On note $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n\}$ l'univers associé à une expérience aléatoire.

i. On définit une **loi de probabilité** sur Ω lorsqu'on associe à chaque issue e_i un nombre $p(e_i)$, appelé **probabilité** de l'issue e_i, de telle sorte que :

- $\begin{cases} 0 \leq p(e_i) \leq 1 \text{ , pour tout } 1 \leq i \leq n \\ p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_n) = 1 \end{cases}$.

ii. On dit que la loi est une **loi équirépartie** lorsque toutes les issues ont la même probabilité.

Propriété :

Dans les conditions d'une loi de probabilité équirépartie sur Ω :

- $p(e_1) = p(e_2) = \dots = p(e_n) = \dfrac{1}{n}$.

Exemples :

- « Dé non pipé »

Le dé étant non pipé, on conçoit que les issues sont équiprobables.
On définit la loi de probabilité équirépartie sur Ω : $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \dfrac{1}{6}$.

- On considère la loi de probabilité suivante sur $\Omega = \{a ; b ; c\}$:

Issue	a	b	c
Probabilité	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{3}$	

Calculer $p(c)$.
On a : $p(a) + p(b) + p(c) = 1$ d'où : $p(c) = 1 - [p(a) + p(b)] = \dfrac{5}{12}$.

b. Probabilité d'un événement

Définitions :

On considère une loi de probabilité sur un univers Ω.
i. On appelle **événement** toute partie A de Ω.
ii. La **probabilité d'un événement** A, notée $p(\text{A})$, est la somme des probabilités des issues de A.

Cas particuliers :

i. Ω est l'**événement certain** et $p(\Omega) = 1$.
ii. $\varnothing$ est l'**événement impossible** et $p(\varnothing) = 0$.

Remarques :

Si A et B sont deux événements, alors :

- $0 \leq p(\mathrm{A}) \leq 1$.
- $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ entraîne $p(\mathrm{A}) \leq p(\mathrm{B})$.

Propriété :

Dans les conditions d'une loi de probabilité équirépartie sur Ω :

- $p(\mathrm{A}) = \dfrac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre total d'issues}} = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Exemple :

- « Groupe d'élèves »

Soit A l'événement : « L'élève rencontré est un garçon ».
La rencontre ayant lieu au hasard, la loi de probabilité sur Ω est équirépartie.
On a : $p(\mathrm{A}) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{25}{40} = 0{,}625$.

c. Evénement contraire

Définition :

On considère une loi de probabilité sur Ω et un événement A.
L'**événement contraire** de A, noté $\overline{\mathrm{A}}$, est la partie de Ω constituée des issues qui ne sont pas dans A.

Propriété :

Si A et $\overline{\mathrm{A}}$ sont 2 événements contraires, alors :

- $p(\mathrm{A}) + p(\overline{\mathrm{A}}) = 1$.

Exemple :

- « Groupe d'élèves »

Soit A l'événement : « L'élève rencontré est un garçon ».
L'événement $\overline{\mathrm{A}}$ est l'événement : « L'élève rencontré est une fille ».
On a : $p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - p(\mathrm{A}) = 0{,}375$.

§ 3. INTERSECTION ET REUNION DE DEUX EVENEMENTS

a. Intersection de 2 événements

Définition :

On considère une loi de probabilité sur Ω et deux événements A et B.
L'**événement intersection** de A et de B, noté $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, est la partie de Ω constituée des issues qui sont à la fois dans A et dans B.

Exemple :

- « Groupe d'élèves »

Soit A l'événement : « L'élève rencontré est un garçon ».
Soit B l'événement : « L'élève rencontré a 17 ans ».
L'événement $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ est : « L'élève rencontré est un garçon et a 17 ans ».
On a : $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{10}{40} = 0{,}25$.

b. Réunion de 2 événements

Définition :

On considère une loi de probabilité sur Ω et deux événements A et B.
L'**événement réunion** de A et de B, noté $A \cup B$, est la partie de Ω constituée des issues qui sont dans l'un des deux événements A ou B.

Exemple :

- « Groupe d'élèves »

Soit A l'événement : « L'élève rencontré est un garçon ».
Soit B l'événement : « L'élève rencontré a 17 ans ».
L'événement $A \cup B$ est : « L'élève rencontré est un garçon ou a 17 ans ».
L'événement contraire $\overline{A \cup B}$ est : « L'élève rencontré est une fille et a 18 ans ».

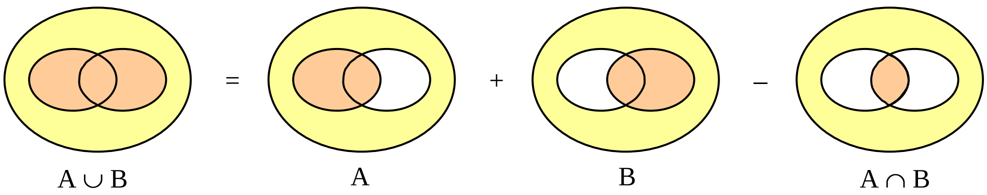
On a : $p(\overline{A \cup B}) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{9}{40} = 0,225$.

D'où : $p(A \cup B) = 1 - p(\overline{A \cup B}) = 0,775$.

Propriété :

Si A et B sont deux événements, alors :

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.



§ 4. PROBABILITES CONDITIONNELLES

a. Approche

Exemple :

Le tableau d'effectifs suivant donne la répartition des 500 élèves d'un lycée suivant leur sexe et la LV2 étudiée :

	allemand	espagnol	total
garçons	180	120	300
filles	140	60	200
total	320	180	500

On tire au hasard, parmi le fichier des élèves du lycée, la fiche d'un élève.
Calculer de deux manières la probabilité que l'élève soit une fille qui étudie l'allemand.
On note F l'événement : « l'élève est une fille » et A l'événement : « l'élève étudie l'allemand ».
On veut calculer $p(A \cap F)$.
1^ère^ manière :

On a : $p(A \cap F) = \dfrac{\text{nombre de filles étudiant l'allemand}}{\text{nombre d'élèves}} = \dfrac{140}{500} = 0,28$.

2^ème^ manière :

On a : $p(A \cap F) = \dfrac{\text{nombre de filles}}{\text{nombre d'élèves}} \times \dfrac{\text{nombre de filles étudiant l'allemand}}{\text{nombre de filles}} = \dfrac{200}{500} \times \dfrac{140}{200} = 0,28$.

Ainsi, en notant $p_F(A)$ la probabilité que l'élève étudie l'allemand sachant que l'élève est une fille, on a :
$p(A \cap F) = p(F) \times p_F(A)$.

b. Probabilité conditionnelle

Définition :

On considère une loi de probabilité sur Ω, et deux événements A et B avec $p(\text{A}) \neq 0$.
La **probabilité de B sachant A**, notée $p_{\text{A}}(\text{B})$, est définie par :

- $p_{\text{A}}(\text{B}) = \dfrac{p(\text{B} \cap \text{A})}{p(\text{A})}$.

Conséquence :

- $p(\text{B} \cap \text{A}) = p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{B})$.

Exercice :

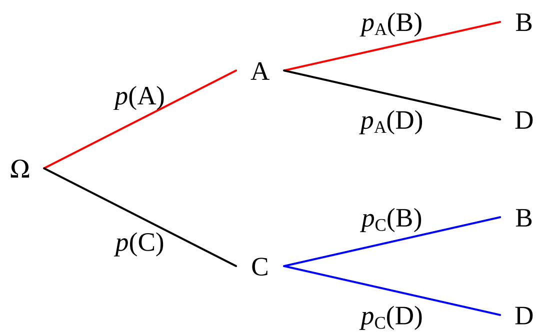
- On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules d'une urne contenant 5 boules rouges et 3 boules noires.

Calculer la probabilité de tirer 2 boules rouges.
On note A l'événement : « la $1^{\text{ère}}$ boule tirée est rouge » et B l'événement : « la $2^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge ». On veut calculer $p(\text{A} \cap \text{B})$.
On a : $p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{B}) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{5}{14}$.

c. Arbre de probabilités

Définition :

Un **arbre de probabilités** schématise le déroulement d'une expérience aléatoire.
Il est constitué de **nœuds**, sur lesquels sont indiqués des événements, de **branches**, auxquelles sont affectées des probabilités, et de **chemins** que l'on assimile à des intersections d'événements.

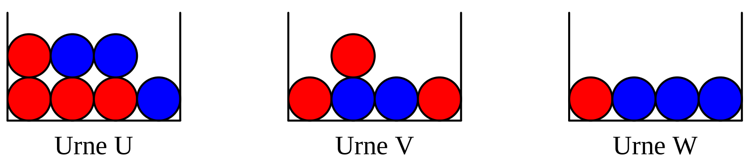


Règles :

i. La probabilité d'une intersection d'événements correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités affectées à chaque branche de ce chemin.
Par exemple, en rouge : $p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{B})$.
ii. La somme des probabilités affectées aux branches d'un même nœud est égale à 1.
Par exemple, en bleu : $p_{\text{C}}(\text{B}) + p_{\text{C}}(\text{D}) = 1$.

Exemple :

On considère les trois urnes U, V et W schématisées ci-dessous :



On choisit une urne au hasard puis on tire une boule au hasard dans cette urne.
On note R l'événement : « la boule tirée est rouge » et B l'événement : « la boule tirée est bleue ».
Représenter cette expérience par un arbre de probabilités.

§ 1. FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

a. Fonction logarithme népérien

Définition :

La **fonction logarithme népérien**, notée ln, est la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ telle que :
- $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- $\ln(1) = 0$.

Propriété :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle **I** de **R**.

La fonction f définie sur **I** par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur **I** et pour tout $x \in$ **R** : $f\,'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Exercice :

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.
Le nombre $f\,'(x)$ est de la forme $\ln(u(x))$ avec $u(x) = x^2 + 1$.
Pour tout $x \in$ **R**, on a : $u'(x) = 2x$.
On a : $f\,'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

b. Sens de variations

Propriété :

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x)$		$+$	
$\ln(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

Autrement dit, pour tous réels a et b strictement positifs :
- $\ln(a) = \ln(b)$ équivaut à $a = b$.
- $\ln(a) < \ln(b)$ équivaut à $a < b$.
- $\ln(a) < 0$ équivaut à $a < 1$.
- $\ln(a) > 0$ équivaut à $a > 1$.

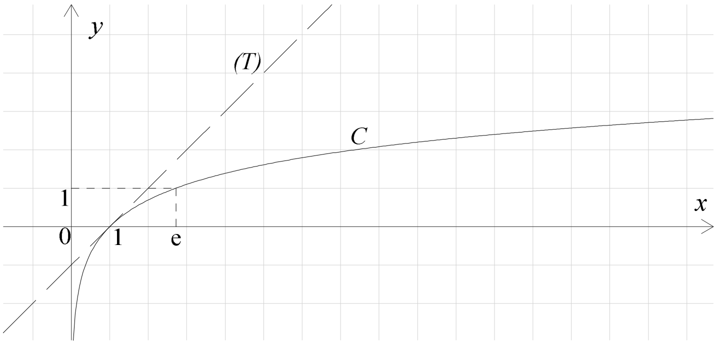
c. Le nombre e

Définition :

On note e l'unique réel tel que $\ln(\mathrm{e}) = 1$.
On a : $\mathrm{e} \approx 2{,}718$.

d. Représentation graphique

Allure :



Remarques :

i. Soit (T) l'équation de la tangente en 1 à la courbe représentative de la fonction ln.
On a : (T) : $y = \ln'(1) \times (x - 1) + \ln(1)$. D'où : ($T$) : $y = x - 1$.
ii. La croissance de la fonction ln est lente.
Par exemple, pour $x = 4000000000$ (longueur de l'équateur en cm), on a : $\ln(x) = \ln(4000000000) < 23$.

e. Propriétés algébriques

Propriétés :

Pour tous réels a et b strictement positifs et pour tout entier relatif n :

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$.
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Exercice :

i. Simplifier l'expression suivante :
$A = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(\frac{8}{3}\right) - \ln(2^3) = \ln(3) - \ln(4) + \ln(8) - \ln(3) - 3\ln(2)$
$A = -\ln(2^2) + \ln(2^3) - 3\ln(2) = -2\ln(2) + 3\ln(2) - 3\ln(2) = -2\ln(2)$

ii. Trouver les valeurs entières de n telles que $1{,}02^n > 1{,}5$.
L'inégalité $1{,}02^n > 1{,}5$ équivaut à $\ln(1{,}02^n) > \ln(1{,}5)$ c'est-à-dire à $n\ln(1{,}02) > \ln(1{,}5)$.
Les valeurs cherchées sont les entiers n tels que $n > \frac{\ln(1{,}5)}{\ln(1{,}02)}$. Or : $\frac{\ln(1{,}5)}{\ln(1{,}02)} \approx 20{,}5$.
Donc les valeurs cherchées sont les entiers $n \geq 21$.

§ 2. PUISSANCES REELLES

a. Puissances réelles

Définition :

Pour tout réel $a > 0$ et pour tout $b \in \mathbf{R}$, on note a^b et on lit « a puissance b » le réel strictement positif tel que : $\ln(a^b) = b\ln(a)$.

Exercice :

Quelle est la valeur actuelle C d'un capital de 1 000 € payable dans 2 ans et demi au taux annuel de 5 % ?

On a : $C \times 1{,}05^{2{,}5} = 1\,000$. D'où : $C = \dfrac{1\,000}{1{,}05^{2{,}5}} \approx 885$ (€).

Propriétés :

Pour tous réels a et a' strictement positifs et pour tous réels b et b' :

- $a^b \times a^{b'} = a^{b+b'}$.
- $a^b \times a'^{\,b} = (aa')^b$.
- $\dfrac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$.
- $\dfrac{a^b}{a'^{\,b}} = \left(\dfrac{a}{a'}\right)^b$.
- $(a^b)^{b'} = a^{b\,b'}$.

b. Résolution d'équations du type $a^x = k$

Propriétés :

Pour tous réels a et k strictement positifs : $a^x = k \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(k)}{\ln(a)}$.

Exercice :

Résoudre l'équation (I) : $0{,}95^x = 0{,}75$.

On a : $0{,}95^x = 0{,}75 \Leftrightarrow \ln(0{,}95^x) = \ln(0{,}75) \Leftrightarrow x \ln(0{,}95) = \ln(0{,}75) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(0{,}95)}{\ln(0{,}75)} \approx 0{,}178$.

c. Résolution d'équations du type $x^n = a$

Propriétés :

Pour tout réel a strictement positif et pour tout entier $n \geq 1$: $x^n = a \Leftrightarrow x = a^{1/n}$.

Exercice :

En 10 ans, la population d'un village est passée de 100 habitants à 150 habitants.
Calculer le taux de croissance annuel moyen t sur cette période.
On a : $100 \times (1+t)^{10} = 150 \Leftrightarrow (1+t)^{10} = 1{,}5 \Leftrightarrow 1 + t = 1{,}5^{1/10} \Leftrightarrow t = 1{,}5^{1/10} - 1 \approx 0,\,0414 = 4{,}14$ %.
Sur cette période, la population du village a augmenté d'environ 4,14 % par an.

§ 3. FONCTION EXPONENTIELLE

a. Fonction exponentielle

Définitions :

i. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on note $\exp(x)$ ou e^x l'unique réel strictement positif y tel que $\ln(y) = x$.
ii. La fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \exp(x)$ ou $f(x) = e^x$ s'appelle la **fonction exponentielle**.

Conséquences :

- On a : $\exp(0) = 1$ ou $e^0 = 1$.
- On a : $\exp(1) = e$ ou $e^1 = e$.
- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\exp(x) > 0$ ou $e^x > 0$.
- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$ ou $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout $x > 0$, $\exp(\ln(x)) = x$ ou $e^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $y > 0$, $\ln(y) = x$ équivaut à $y = e^x$.

b. Propriétés algébriques

Propriétés :

Pour tous réels a et b et pour tout entier relatif p :

- $e^{a+b} = e^a e^b$.
- $(e^a)^p = e^{pa}$.
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.

c. Sens de variations

Propriété :

i. La fonction exponentielle est dérivable sur **R**.
ii. Pour tout $x \in$ **R**, $\exp'(x) = \exp(x)$.
iii. La fonction exponentielle est strictement croissante sur **R**.

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	+	
$\exp(x)$	0 ↗	$+\infty$

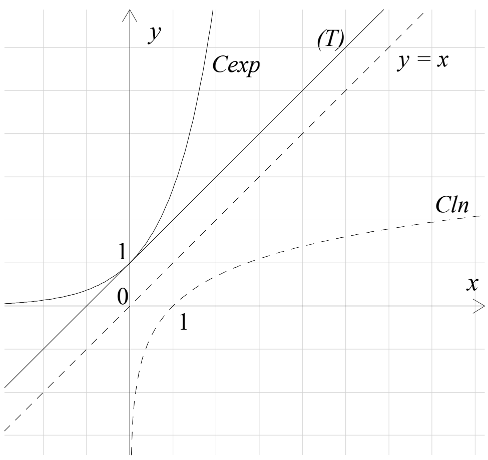
Autrement dit, pour tous réels a et b :

- $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$.
- $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$.
- $e^a < 1$ équivaut à $a < 0$.
- $e^a > 1$ équivaut à $a > 0$.

d. Représentation graphique

Propriété :

La courbe représentative de la fonction exponentielle se déduit de celle de la fonction ln par la symétrie d'axe (d) : $y = x$.



Remarques :

i. Soit (T) l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de la fonction exponentielle.
On a : (T) : $y = \exp'(0) \times (x - 0) + \exp(0)$. D'où : (T) : $y = x + 1$.

ii. La croissance de la fonction exponentielle est rapide.

e. Complément sur les dérivées

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle **I** de **R**.
La fonction f définie sur **I** par $f(x) = \exp(u(x))$ est dérivable sur **I** et pour tout $x \in$ **R** :

- $f'(x) = u'(x) \times \exp(u(x))$.

Exercice :

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \exp(x^2 + 1)$.

Le nombre $f(x)$ est de la forme $\exp(u(x))$ avec $u(x) = x^2 + 1$.
La fonction u est dérivable sur **R** donc la fonction f est dérivable sur **R** et pour tout $x \in$ **R** :
$f'(x) = u'(x) \times \exp(u(x)) = 2x \times \exp(x^2 + 1)$.

§ 4. FONCTIONS EXPONENTIELLES

a. Fonction exponentielle de base *a* ; *a* > 0

Définition :

On considère un réel $a > 0$. La fonction f définie sur **R** par $f(x) = a^x = e^{x \ln(a)}$ s'appelle la **fonction exponentielle de base *a***.

b. Dérivée

Propriétés :

On considère un réel $a > 0$.
i. La fonction exponentielle de base a est dérivable sur **R**.
ii. Pour tout $x \in$ **R**, $(a^x)' = \ln(a) \times a^x$.

c. Sens de variation

Propriétés :

i. Si $0 < a < 1$, alors la fonction exponentielle de base a est strictement décroissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
$(a^x)'$	$-$	
a^x	$+\infty$ ↘	0

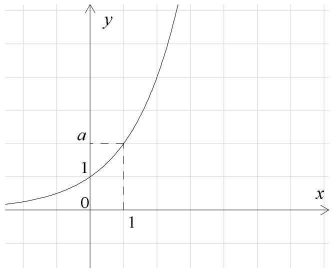
ii. Si $a > 1$, alors la fonction exponentielle de base a est strictement croissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
$(a^x)'$	$+$	
a^x	0 ↗	$+\infty$

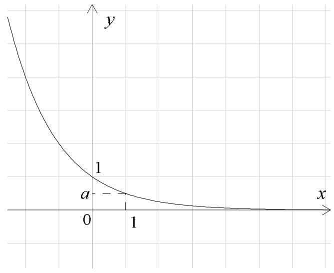
d. Représentation graphique

Allures :

i. $0 < a < 1$:



ii. $a > 1$:



§ 5. LIEN AVEC LES SUITES GEOMETRIQUES

a. Sens de variation d'une suite géométrique

Propriétés :

i. Si $0 < q < 1$, alors une suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme $u_0 > 0$ est strictement décroissante.
ii. Si $q > 1$, alors une suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme $u_0 > 0$ est strictement croissante.

Définition :

Dans les conditions de la propriété précédente, dans le premier cas, on parle de **décroissance exponentielle** et dans le second cas, de **croissance exponentielle**.

b. Application

Exercice :

La population d'un village en 2000 était de 1000 habitants et a baissé régulièrement de 5 % par an.
A ce rythme, en quelle année la population du village sera inférieure à 500 habitants ?

On note u_n la population du village au bout de n années depuis l'année 2000.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$: $u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \dfrac{5}{100}\right) = u_n \times 0{,}95$.

Ainsi, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$: $u_n = 1000 \times 0{,}95^n$, et comme $0{,}95 < 1$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

On cherche le plus petit entier n tel que $u_n < 500$.

Or, $1000 \times 0{,}95^n < 500$ équivaut à $\mathrm{e}^{n \ln (0{,}95)} < 0{,}5$ c'est-à-dire à $n \ln (0{,}95) < \ln (0{,}5)$ et $n > \dfrac{\ln (0{,}5)}{\ln (0{,}95)}$.

On a : $\dfrac{\ln (0{,}5)}{\ln (0{,}95)} \approx 13{,}5$ donc le plus petit entier n cherché est 14.

A ce rythme, la population du village sera inférieure à 500 habitants en 2014.