Université Paul Valéry
Arts - Lettres - Langues
Sciences humaines & sociales

XA101M – méthodologie mathématique
Année 2003–2004

Fiche d'exercices 4 : fonctions

SAVOIR

Domaine de définition d'une fonction

On appelle fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et on note

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

un objet qui à tout nombre réel x associe *au plus* un nombre réel. Si une fonction f associe $f(x)$ au nombre réel x, le nombre $f(x)$ s'appelle l'*image* de x par f.
L'ensemble des nombres réels à qui une fonction f associe une image s'appelle le *domaine de définition* de la fonction f. On note $D(f)$ l'ensemble de ces nombres réels. Dire qu'une fonction est *définie* sur un ensemble E, c'est dire que son ensemble de définition est E.
Donner une fonction, c'est donner une « recette » qui permet de construire un nombre à partir d'un nombre donné. Trouver le domaine de définition de la fonction, c'est trouver l'ensemble des nombres réels à qui ont peut appliquer la recette. Les exemples suivants sont fondamentaux.
On considère la fonction inverse

$$\text{inv} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x}. \end{array}$$

On peut calculer $\text{inv}(x)$ pour tout nombre réel x sauf pour $x = 0$. Le domaine de définition de inv est donc $D(\text{inv}) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
On considère la fonction racine carrée

$$\sqrt{\ } : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x}. \end{array}$$

On peut calculer $\sqrt{x}$ pour tout nombre réel x positif. Le domaine de définition de $\sqrt{\ }$ est donc $D(\sqrt{\ }) = \mathbb{R}^+$.
Soit f et g deux fonctions. On considère la fonction

$$\frac{f}{g} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)}{g(x)}. \end{array}$$

On peut calculer cette fonction pour tout nombre réel x tel que :

1. on peut calculer $f(x)$
2. on peut calculer $g(x)$
3. le réel $g(x)$ est non nul.

Le domaine de définition de $\frac{f}{g}$ est donc l'ensemble des nombres qui sont à la fois dans les domaines de définition de f et g et pour lesquels g ne s'annule pas.
Enfin, si f est une fonction, on considère la fonction

$$\sqrt{f} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{f(x)}. \end{array}$$

On peut calculer $\sqrt{f(x)}$ pour tout nombre réel x tel qu'on peut calculer $f(x)$ et $f(x) \geq 0$.
Trouver un domaine de définition revient donc souvent à résoudre des équations et des inéquations.

— EXERCICES —

I) Parmi les figures 1 à 4, lesquelles représentent des fonctions ?

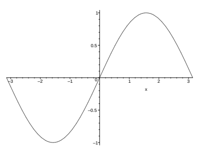

FIG. 1 –

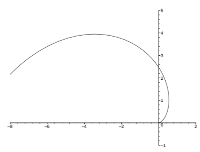

FIG. 2 –

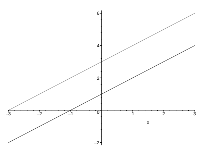

FIG. 3 –

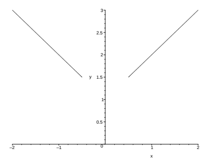

FIG. 4 –

II) Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes. **1)** $a(x) = 2$ **2)** $b(x) = x^2$ **3)** $c(x) = \dfrac{1}{x+1}$ **4)** $d(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ **5)** $e(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$ **6)** $f(x) = \dfrac{x^3+x}{x^4+x^2+1}$ **7)** $g(x) = \dfrac{x^3+x}{x^4-2x^2+1}$ **8)** $h(x) = \sqrt{x+4}$ **9)** $i(x) = \sqrt{2x^3-3x}$ **10)** $j(x) = \sqrt{(2x+1)^2+3}$ **11)** $k(x) = \sqrt{(2x+1)^2-3}$ **12)** $\ell(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ **13)** $m(x) = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{-x}}$ **14)** $n(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{\sqrt{x-2}}}$ **15)** $o(x) = \sqrt[3]{x^3}$ **16)** $p(x) = \sqrt[4]{(x-2)^4}$.

SAVOIR

Fonction dérivée d'une fonction.

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ et x_0 un réel de $]a, b[$. On définit une fonction $\Delta[f; x_0]$ par

$$\Delta[f; x_0](x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Le domaine de définition de $\Delta[f; x_0]$ est $[a, b] \setminus \{x_0\}$ et $\Delta[f; x_0](x)$ est la pente de la droite passant par les points de coordonnées $\big(x_0, f(x_0)\big)$ et $\big(x, f(x)\big)$. Si le nombre $\Delta[f; x_0](x)$ tend vers un nombre réel lorsque x tend vers x_0, alors ce nombre est appelé *nombre dérivé* de f en x_0. On le note $f'(x_0)$.
On dit que f est *dérivable* sur $]a, b[$ si on peut calculer son nombre dérivé pour tout réel x_0 de $]a, b[$. Dans ce cas, on peut définir une fonction $x \mapsto f'(x)$ sur $]a, b[$. Cette fonction s'appelle *fonction dérivée*, ou plus simplement *dérivée* de la fonction f.
Pour calculer les dérivées, on utilisera les règles de calculs suivantes. La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto 1$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions dérivables *toutes les deux* sur I.

$$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (\alpha f)' &= \alpha f' \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ (f \times g)' &= f' \times g + f \times g' \\ \left(f^r\right)' &= r f^{r-1} \times f' \quad (r \in \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Si, de plus, la fonction g ne s'annule pas sur I alors

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, si f est une fonction dérivable sur I et si g est une fonction dérivable sur J telles que, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in J$, alors

$$\boxed{(f \circ g)' = g' \times f' \circ g}$$

où

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big).$$

— EXERCICES —

III) Faire un tableau des fonctions dérivées des fonctions de référence suivantes. **1)** $x \mapsto x$ **2)** $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ **3)** $x \mapsto x^2$ **4)** $x \mapsto \sqrt{x}$ **5)** $x \mapsto x^n$ ($n \geq 0$ entier) **6)** $x \mapsto x^r$ ($r \in \mathbb{Q}$).

IV) Calculer les dérivées des fonctions suivantes **1)** $a(x) = 6x^2 - 12x + 2$ **2)** $b(x) = x^5 - 5x^2 + 13x + 7$ **3)** $c(x) = (x-2)(x-3)$ **4)** $d(x) = -6x^5 + 3x + \sqrt{x} - 2$ **5)** $e(x) = (x^5+2)^{15}$ **6)** $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ **7)** $g(x) = \dfrac{4-x}{5+x}$ **8)** $h(x) = \dfrac{1}{x^7 - \sqrt{x}}$ **9)** $i(x) = \dfrac{3x+4}{4x^2+5x+1}$ **10)** $j(x) = \dfrac{3x^2-2x+5}{x^2-x+1}$ **11)** $k(x) = \dfrac{2\sqrt{x}+x}{3-\sqrt{x}}$ **12)** $\ell(x) = \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x^2-1)^7}$ **13)** $m(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ **14)** $n(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{(x+1)^4}}$ **15)** $o(x) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}}$.

SAVOIR

Trois applications

Équation de la tangente en un point d'une courbe. — Si la fonction f est dérivable en x_0, alors l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction f au point $\big(x_0, f(x_0)\big)$ est

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).}$$

Étude de la monotonie d'une fonction. — On dit qu'une fonction f définie au moins sur I est *croissante* sur I si pour tous x et x' dans I tels que $x \geq x'$, on a $f(x) \geq f(x')$. On dit qu'une fonction f définie au moins sur I est *décroissante* sur I si pour tous x et x' dans I tels que $x \geq x'$, on a $f(x) \leq f(x')$. On dit que f est *monotone* sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I. Si f est dérivable sur I et si, pour tout x de I, on a $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I. Si f est dérivable sur I et si, pour tout x de I, on a $f'(x) \leq 0$, alors f est decroissante sur I.

Extremums locaux. — Si f est une fonction définie sur $]a,b[$; on dit qu'elle admet un *maximum local* en un point x_0 de $]a,b[$ s'il existe un intervalle $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ (avec $\alpha > 0$) contenu dans $]a,b[$ tel que $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout x de $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$; on dit qu'elle admet un *minimum local* en un point x_0 de $]a,b[$ s'il existe un intervalle $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ (avec $\alpha > 0$) contenu dans $]a,b[$ tel que $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout x de $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$.

Si la fonction f définie sur $[a,b]$ admet un extremum local au point x_0 de $]a,b[$ et si $f'(x_0)$ existe, alors $f'(x_0) = 0$.

Soit f est une fonction définie sur $]a,b[$ et x_0 un nombre de $]a,b[$; si f est dérivable sur un intervalle $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ $\big(\alpha > 0\big)$, si $f'(x_0) = 0$ et si f' n'a pas le même signe sur $]x_0-\alpha, x_0[$ et $]x_0, x_0+\alpha[$ alors f admet un extremum local en x_0.

Le dernier énoncé peut se retenir sous la forme « si f est dérivable autour de x_0 et si sa dérivée s'annule en changeant de signe en x_0, alors f admet un extremum local en x_0 ».

— EXERCICES —

V) Étudier la monotonie des fonctions suivantes. **1)** $x \mapsto 3x+5$ **2)** $x \mapsto -2x+4$ **3)** $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ **4)** $x \mapsto x^2$ **5)** $x \mapsto \sqrt{x}$ **6)** $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ **7)** $x \mapsto x^r$, ($r \in \mathbb{Q}$).

VI) Tracer les tableaux de variations des fonctions suivantes. **1)** $x \mapsto x^3$ **2)** $x \mapsto x^2 - 3x - 4$ **3)** $x \mapsto -x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ **4)** $x \mapsto x^4 + x^3 - x^2 - x + 1$ **5)** $x \mapsto \dfrac{2x+5}{x+4}$ **6)** $x \mapsto \dfrac{1-2x}{x^2}$ **7)** $x \mapsto \sqrt{3-x}$ **8)** $x \mapsto \sqrt{x^2-3x-4}$.

VII) 1) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = 4x^2 - 3$ au point d'abscisse -1. Faire une représentation graphique de la courbe et de la droite tangente calculée.

2) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = x^3 + 3x - 2$ au point d'abscisse 0.

3) La droite d'équation $16y + 2x = 1$ est-elle tangente à la courbe $y = 2x^2 - 1$?

VIII) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$. **1)** Donner le tableau de variations de f. **2)** En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$ suivant la valeur de a.

IX) 1) Déterminer les réels a et b tels que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ admette un maximum égal à $\dfrac{3}{4}$ en $x = \dfrac{1}{2}$ et prenne la valeur 1 en $x = 1$.

2) Représenter graphiquement la fonction obtenue.

3) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$ suivant les valeurs de m.

X) On dispose d'une plaque de carton de forme carrée de côté a. On découpe dans chaque coin un carré de côté x dans le but de confectionner une boîte sans couvercle en relevant les bords. Comment choisir x (en fonction de a) pour obtenir une boîte de volume maximal ?

XI) Une entreprise veut déterminer les dimensions d'une boîte en forme de parallélépipède à base carrée sans couvercle de façon que le prix soit minimum. Le volume doit être de 320cm^2, le prix de la matière utilisée est $0,8$ centimes par centimètre carré pour le fond et 1 centime par centimètre carré pour la surface latérale. Quelles doivent être les dimensions de la boîte ?

XII) On veut enclore, le long d'une rivière, avec 1000 mètres de clôture, un champs rectangulaire d'aire maximum (aucune clôture n'est nécessaire le long de la rivière). Quelles sont les dimensions du champs obtenu ? Quelle est son aire ?

XIII) Un verger d'un hectare contient 100 pommiers. Chaque pommier produit 500 pommes. On a déterminé que chaque pommier supplémentaire diminue le rendement de chaque arbre de $1,25\%$. Déterminer le nombre de pommiers supplémentaires qu'il faut planter pour maximiser le rendement du verger.