Université Paul Valéry

XA101M – méthodologie
Année 2003–2004

Examen de méthodologie mathématique du 24 avril 2004 – durée : 1 heure

Un bon devoir est au moins autant un devoir bien justifié q'un devoir avec les reponses justes.

Exercice 1 –

Simplifier les deux expressions suivantes en explicitant les calculs intermédiaires :

$$A = \frac{(r^2 - 2r + 1)(a^4 b^{-4})^{1/2}}{(a(r-1))^2\, b^2}, \qquad B = \frac{5^{1/4}\sqrt[4]{10}}{\sqrt{\sqrt{2}}}.$$

On a $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$ donc

$$A = \frac{(r-1)^2 a^2 b^{-2}}{a^2 (r-1)^2 b^2} = \frac{1}{b^4}.$$

$$B = \frac{5^{1/4} \times 10^{1/4}}{(2^{1/2})^{1/2}} = \frac{5^{1/4} \times 2^{1/4} \times 5^{1/4}}{2^{1/4}} = 5^{1/4} \times 5^{1/4} = 5^{1/2}.$$

Exercice 2 – Résoudre les trois équations ci-dessous

1. $(x^4 - 3)^4 + 3 = 0$
2. $(x^4 - 3)^3 + 3 = 0$
3. $9x^2 - 2x - 5 = 0.$

1) Pour tout nombre réel x, on a $(x^4 - 3)^4 \geq 0$ donc $(x^4 - 3)^4 + 3 \geq 3$. Puisque $3 > 0$, l'équation $(x^4 - 3)^4 + 3 = 0$ n'a pas de solution.

2) L'équation $(x^4 - 3)^3 + 3 = 0$ est équivalente à $(x^4 - 3)^3 = -3$ puis à $x^4 - 3 = -3^{1/3}$ et donc à $x^4 = 3 - 3^{1/3}$. Ainsi, les solutions de $(x^4 - 3)^3 + 3 = 0$ sont

$$\left\{ -\left(3 - 3^{1/3}\right)^{1/4}, \left(3 - 3^{1/3}\right)^{1/4} \right\}$$

3) Le discriminant est $2^2 - 4 \times 9 \times (-5) = 184 = 4 \times 46$.Les solutions sont donc

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{184}}{2 \times 9} = \frac{1 - \sqrt{46}}{9}$$

et

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{184}}{2 \times 9} = \frac{1 + \sqrt{46}}{9}.$$

Exercice 3 –

On extrait le texte ci-dessous de l'article « Un employé sur quatre est logé dans moins de 12m^2 », paru dans *Le Monde* du 23 février 2004.

On a interrogé 309 travailleurs saisonniers employés dans une quarantaine de stations de ski d'Isère, de Savoie et de Haute-Savoie. « 58% des personnes interrogées sont logées par leur employeur – à titre gratuit dans près de deux cas sur trois. (...) Parmi les saisonniers qui versent une contribution pour leur logement (61% de la population étudiée), le tiers paie plus de 299 euros par mois. »

1] Combien d'employés interrogés sont logés par leur employeur ?
2] Combien d'employés interrogés, logés par leur employeur, le sont à titre gratuit.
3] Combien d'employés interrogés paient plus de 299 € par mois pour leur logement ?
4] On suppose que tous les employés non logés par leur employeur paient leur logement. Justifier le calcul du journaliste indiquant que 61% des employés interrogés versent une contribution pour leur logement.

1) Puisque 58% des 309 personnes interrogées sont logées par leur employeur, le nombre de personnes logées par leur employeur est

$$\frac{58 \times 309}{100} = 179,22$$

qu'on arrondit à 179 personnes (en fait le journaliste a probablement arrondi 57,93% à 58%. Remarquer tout de même que si 178 ou 180 personnes avaient été logées par leur employeur, le journaliste aurait aussi arrondit à 58%.)

2) Les deux-tiers des 179 personnes logées par leur employeur le sont à titre gratuit. Cela fait donc

$$\frac{2 \times 179}{3} = 119,33$$

qu'on arrondit à 119 personnes.

3) Puisqu'un tiers des personnes logées par leur employeur paient leur logement, le nombre de personnes logées par leur employeur qui paient leur logement est

$$\frac{1 \times 179}{3} = 59,66,$$

on arrondit à 60 personnes. Sur les 309 personnes interrogées, 179 sont logées par leur employeur donc $309 - 179 = 130$ se logent par leurs propres moyens (et paient). Il y a donc $160 + 30 = 190$ personnes qui paient leur logement. Un tiers de ces gens paie plus de 299 €. Cela représente $190/3 = 63,33$ personnes. On arrondit à 63 personnes.

4) Puisque 190 personnes paient leur logement (voir question précédente), la proportion des personnes interrogées qui paient leur logement est

$$\frac{190}{309} = 61,49\%$$

arrondit à 61%.

Exercice 4 –

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = 7x^2 + 3x + 1$ au point d'abscisse $x = 1$. En quel(s) point(s) la courbe $y = 7x^2 + 3x + 1$ coupe-t-elle sa tangente au point d'abscisse $x = 1$?

Posons $f(x) = 7x^2 + 3x + 1$. On a $f'(x) = 14x + 3$ d'où $f'(1) = 17$. On a $f(1) = 11$, l'équation de la tangente est donc

$$y = 11 + 17(x - 1)$$

donc

$$y = 17x - 6.$$

Si $x = 1$ alors $f(1) = 11$ et donc la courbe coupe sa tangente en $(1, 11)$.