Fonctions à une variable

A- Rappels de quelques formules sur la dérivation

Si f et g sont des fonctions définies et dérivables sur l'intervale I, et si c est une constante :

$$(cf)' = cf'$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Si de plus g ne s'annule pas sur I :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

En complément :
On rappelle que : $(fog)(x) = f(g(x))$, on suppose que $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$.
Dérivation des fonctions composées :

$$(fog)' = (f'og)g'$$

Démontrer les formules correspondant à la dérivée de $Ln(u(x))$ et $e^{u(x)}$.
De plus on note f^{-1} la fonction réciproque de la fonction f.
Par exemple la fonction réciproque de la fonction "carré" est la fonction racine carrée.

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'of^{-1}}$$

.
Vérifier alors que $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

B-Exercices de calcul

Pour se dérouiller, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = x^2 + 3x - 7$ $\quad f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ $\quad f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-x-2}$ $\quad f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2}$

$f(x) = \sqrt{3x-1}$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x-1}}$ $\quad f(x) = \sqrt{x^3}$ $\quad f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{2x+1}}$

$f(x) = Ln(3x+1)$ $\quad f(x) = e^{3x-1}$ $\quad f(x) = Ln(x^3)$ $\quad f(x) = e^{x^2+1}$.

C- Applications économiques des fonctions

1- On donne les fonctions d'offre et de demande. Représenter ces deux fonctions sur un même graphique et déterminer les valeurs qui correspondent à l'équilibre du marché.

a) offre : $y = x^2 + 5x + 2$
demande : $y = -2x^2 + 3$

b) offre : $y = x + 5$
demande : $y = \dfrac{10}{x+1} - 1$

2- On sait que l'équilibre du marché se trouve au point $(2, y_0)$. La fonction d'offre est donnée par : $y = x^2 + 2$. La fonction de demande est donnée par : $y = ax^2 + 2x + 6$.

Trouver a et y_0.

D- Rappels sur la concavité des fonctions

On va considérer des fonctions qui sont au moins deux fois dérivables sur leur domaine de définition.

Une fonction est dite concave si la tangente se situe au dessus de la courbe, si $f"(x) < 0$.

Une fonction est dite convexe si la tangente se situe au dessous de la courbe, si $f"(x) > 0$.

Si la dérivée seconde est continue, les points d'inflexion correspondent aux valeurs de la variable qui annulent la dérivée seconde.

Exemples :

1- Chercher les extrema et étudier la courbure de la fonction $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

2- Soit $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 1$. Chercher les extrema de cette fonction ainsi que les points d'inflexion s' ils existent.

E-Profit, Revenu marginaux, situation de monopole :

Exercice de révision :

Si le coût total est de $CT = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ déterminer le coût moyen et le coût marginal pour $x > 0$.

Donner l'esquisse des deux courbes.

Définition : Pour toute fonction de demande $y = f(x)$ où y représente le prix par unité demandée et x le nombre d'unités demandées le revenu total RT est égal au produit de x par y. $RT = x.y = x.f(x)$.

Le revenu marginal est égal à la dérivée par rapport à x du revenu total.

Exemple :

Soit la fonction de demande $y = -2x + 3$. Déterminer et représenter le revenu total et le revenu marginal.

F-Profit en régime de monopole :

On contrôle l'offre et le prix afin de maximaliser le profit.

La fonction profit total est donnée par $PT = RT - CT$.

Le profit total est maximal si $PT' = 0$ et $PT" < 0$. Expliquer pourquoi cela signifie que le profit est maximal quand le revenu marginal est égal au coût marginal.

Exemples :

1- La fonction de demande d'un bien est $y = 18 - 5x$ et le coût total pour le monopoleur est : $CT = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.

On cherche le profit maximal que le monopoleur peut obtenir.

2- Un fabriquant produit q unités par semaine à un coût total de $\dfrac{q^2}{25} + 3q + 100$. Il est en régime de monopole et la demande est $q = 75 - 3p$ où p est le prix d'une unité.

Trouver le nombre d'unités que ce fabriquant doit produire par semaine pour maximiser son bénéfice. Quel est le bénéfice maximum ? Quel est le prix de monopole ?

G- Exercices complèmentaires liés à la microéconomie :

Ex 1- Le coût marginal correspondant à la production d'un produit P est donné en fonction de la quantité produite x par : $C_m(x) = ax^2 + bx + c$.

1) Préciser la condition permettant d'assurer que la fonction C_m admet un minimum.

2) On donne $a = 3$. De plus l'équation $C_m(x) = 0$ admet pour unique solution le réel 10. Préciser l'expression de $C_m(x)$ en fonction de x.

3) Le coût total vérifie $C(0) = 0$. Préciser l'expression de $C(x)$ en fonction de x, puis celle du coût moyen $M(x)$.

4) Tracer les représentations graphiques de C_m et M après avoir étudier leurs variations sur $[0, +\infty[$. Que peut-on remarquer à propos du minimum de M ?

Ex 2- Le coût total de gestion d'un stock est donné par la relation :

$C_t(x) = C_r(x)+C_s(x)$ où x est le nombre de produits commandés pour le réapprovisionnement, $C_r(x)$ est le coût du réapprovisionnement et $C_s(x)$du stockage pour x produits commandés.

On sait que $C_r(x) = 0,5x$ et $C_r(x) = \dfrac{2}{x}$.

1) Représenter les fonctions C_r et C_s dans le même repère. En déduire l'allure de la courbe de C_t.

2) Etudier les variations de la fonction C_t et déterminer la valeur de x pour laquelle le coût total est minimal.

Ex 3 :

En fonction de la quantité produite le coût total d'une entreprise est donné par :

$C(q) = 10^6 + 10q$.

a) Calculer le coût marginal en fonction de la quantité produite , $C_m(q)$.

b) Calculer le coût moyen en fonction de la quantité produite , $C_M(q)$.

c) Représenter le coût marginal et le coût moyen sur le même graphique.

d) L'entreprise est en situation de monopole et la demande du marché est donné en fonction du prix p par : $q = (20 - p)10^6$. Exprimer en fonction de q le prix, la recette et le bénéfice. Déterminer la quantité et le prix pour lesquels le bénéfice sera maximal, calculer alors ce bénéfice.

e) L'entreprise envisage alors une campagne de publicité dont elle attend une nouvelle fonction de demande : $q = (22 - p)10^6$. Quelle seraient les ventes si le prix reste inchangé ?

Déterminer la quantité et le prix pour lesquels le bénéfice sera maximal, calculer alors ce bénéfice.

Quel budget maximum peut-on consacrer à la campagne de publicité ? Que représente ce budget comme part des recettes attendues ?

H-La fonction exponentielle :

La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ mais à valeur dans $]0, +\infty[$. Elle transforme une somme en produit c'est à dire $exp(x + y) = exp(x)exp(y)$. L'exponentielle de base e vérifie de plus $exp(1) = e$.

On a : $exp(0) = 1$.

De plus $exp(x)^{'} = exp(x)$, la fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Justifier les résultats suivants en **exercices**

$exp(-x) = \dfrac{1}{exp(x)}$ $\qquad exp(x - y) = \dfrac{exp(x)}{exp(y)}$

Les remarques précédentes permettent de justifier la notation $exp(x) = e^x$.

Exercices

1- Faire le tableau de variation de cette fonction en y mettant toutes les informations que vous pouvez obtenir. Faire la représentation graphique de la fonction *exp* en cherchant des valeurs avec la calculatrice.

2- On a $e^{u(x)} = u'(x)e^{u(x)}$.

En utilisant cette formule préciser l'ensemble de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^{x^2} \qquad g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad h(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

Problème- Partie A :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = -\frac{e}{2}x^2 + e^x$.

1) Calculer la dérivée de la fonction f.

2) Soit la fonction g définie par : $g(x) = -ex + e^x$.

Etudier le sens de variation de g. Calculer $g(1)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f. Préciser les valeurs de f en 0 et en 1.

Partie B :

La fonction précédente f représente le coût total de production d'une PMI en milliers d'euros pour une production x exprimée en milliers d'objets , x étant compris entre 0 et 3.

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

a) Que représente $f(0)$? Que représente la fonction g ?

b) Interpréter le point d'abscisse 1.

c) Etudier graphiquement le sens de variation du coût moyen.