AES - Misashs

1 Résolution d'équations

Equations du premier degré

Soit $a \neq 0$ et b deux réels donnés,

Toute équation de la forme $ax = b$ (équation dite du premier degré) où a, b sont des nombres réels donnés , $a \neq 0$ et x est l'inconnue, admet une unique solution $x = \frac{b}{a}$.

Ne pas confondre : $3 + x = 0$ qui donne $x = -3$, $3x = 0$ qui donne $x = 0$, $3x = 1$ qui donne $x = \frac{1}{3}$.

Résoudre les équations du premier degré suivantes :

$3x+4 = 0 \qquad 3x+4 = 2x-5 \qquad 3x+4 = 2(x-5) \qquad 3x+4 = 5x-5 \qquad 3x+4 = -x-7.$

Les équations suivantes ne sont pas du premier degré mais peuvent s'écrire comme produit de facteurs du premier degré.

Résoudre : $(x-2)(x+3) = 0 \qquad x(3x+1) = 0 \qquad x^2 + 2x + 1 = 0 \qquad x^2 - 6x + 9 = 0$
$x^2 - 9 = 0 \qquad (x+1)^2 - (2x-1)^2 = 0 \qquad x^3 - 9x = 0.$

Equations du second degré

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale de degré 2 exactement ($a \neq 0$).
On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le *discriminant* de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
On sait que :

- Si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c = 0$ a une seule solution $-\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

En appliquant la méthode précédente, résoudre les équations du second degré suivantes :
$4x^2 - 4x + 3 = 0, \quad x^2 - 7x + 10 = 0, \quad 2x^2 - 6x + 4 = 0,$
$-3x^2 - 6x + 4 = 0, \quad x^2 - 2x + 2 = 0, \quad x^2 + x - 1 = 0,$
$5x^2 - 2x - 3 = 0, \quad -3x^2 - 5 = 0, \quad x^2 + 1 = -x, \quad -4x^2 + 8 = 0.$

2 Fonctions polynomiales et fractions rationnelles

1. On appelle *fonction polynomiale de degré n* (ou plus simplement *polynôme de degré n*) une fonction d'une variable réelle :
$$P : x \mapsto P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$
où $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
Lorsque $a_n \neq 0$, on dit que le polynôme est *de degré n exactement.*
2. On appelle *fonctions fractions rationnelles* (ou plus simplement *fractions rationnelles*) les fonction d'une variable réelle :
$$\frac{P}{Q} : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$
où P et Q sont des polynômes, $Q \neq 0$.

3 Ensemble de définition, parité

Soit :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f : x \mapsto f(x)$$

une fonction d'une variable réelle (c'est à dire une une loi de correspondance qui à tout nombre réel x associe **au plus un** nombre réel).
Si $f(x)$ existe, c'est l'*image* de x par f.

L'ensemble des nombres réels pour lesquels f a une image est l'*ensemble de définition* de f. On le note D_f.

Exemples :

1. Les *polynômes* sont définis sur $\mathbb{R}$ tout entier.
2. Les *fractions rationnelles* :
$$\frac{P}{Q} : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$
sont définies sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement des *racines* réelles de Q (c'est à dire des solutions de l'équation $Q(x) = 0$).
(**Un polynôme de degré n a au plus n racines réelles.**)

Exercice 1 :
Soit $P(x) = x^2 + 2x - 3$.
Calculer $P(0)$ et $P(-2)$. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 2 : Déterminer les ensembles de définition des fonctions :

$$\frac{x-2}{x-1} \qquad \frac{x-2}{x^2-x-2} \qquad \frac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \qquad \frac{2x^2-4x-6}{x-1}$$

$$\frac{x}{x^2-1} \qquad \frac{x}{x^3-1} \qquad \frac{x-2}{x^3-x} \qquad \frac{x}{x^3-x} \qquad \frac{x-2}{x^3-x^2-2x}$$

Une fonction, dont l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0, est :
- *paire* si $f(-x) = f(x)$.
- *impaire* si $f(-x) = -f(x)$.

On se contente alors d'étudier et de tracer la fonction sur la partie positive de son ensemble de définition. La courbe représentative de f sur la partie négative s'obtient par symétrie : par rapport à l'axe vertical si f est paire, et par rapport à l'origine si f est impaire.

Exercice 3 : Les fonctions suivantes sont-elles paires ? impaires ? ni l'un ni l'autre ?

$$0 \qquad 1 \qquad x \qquad x+1 \qquad x^2 \qquad x^2+1 \qquad x^2+x+1 \qquad x^3 \qquad x^3+x^2 \qquad x^3+x$$

$$\frac{1}{x} \qquad \frac{1}{x-1} \qquad \frac{x^4}{x^2-1} \qquad \frac{x^2}{x^3+x} \qquad \frac{x}{x^4-1}$$

Exercice 4 : A quelle condition un polynôme est-il pair ? impair ? Même question pour une fraction rationnelle ?

4 Continuité

Les polynômes sont continus sur $\mathbb{R}$, les fractions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition : leurs graphes ne "cassent" pas.

Il est bon de connaître le :

Théorème 1 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue, I intervalle, et a et b deux points de I, $a < b$. Alors f prend sur $[a, b]$ toutes les valeurs comprises entre f(a) et f(b).*

En particulier : si $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ (ou le contraire), il existe $c \in]a, b[$ tel que f(c)=0.

5 Limites

On se contentera de l'idée intuitive de limite :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

plus x se rapproche de a, plus $f(x)$ se rapproche de b.
a et b peuvent être des nombres réels ou $+\infty$" ou $-\infty$" :

- "Proche de $+\infty$" signifie alors arbitrairement grand.
- Et "proche de $-\infty$" signifie arbitrairement grand en valeur absolue et de signe négatif.

On étend (partiellement) à $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, 0_+, 0_-\}$ les opérations algébriques usuelles en posant :

1. $$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$
   $$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$
2. $$(+\infty).(+\infty) = +\infty$$
   $$(+\infty).(-\infty) = -\infty$$
   $$(-\infty).(-\infty) = +\infty$$
3. $\forall a \in \mathbb{R}$,
   $$a + (+\infty) = +\infty$$
   $$a + (-\infty) = -\infty$$
4. Si $a > 0$,
   $$a.(+\infty) = +\infty$$
   $$a.(-\infty) = -\infty$$
   (et le contraire si $a < 0$)
5. $$\frac{1}{+\infty} = 0_+$$
   $$\frac{1}{-\infty} = 0_-$$

$$\frac{1}{0_+} = +\infty$$
$$\frac{1}{0_-} = -\infty$$

Proposition 1 *Si f et g admettent les limites réelles ou infinies a et b au point x_0 réel (ou à droite ou à gauche de x_0) ou en $\pm\infty$, alors en ce point :*

1. *$f+g$ admet la limite $a+b$ si la somme est définie.*
2. *$f \times g$ admet la limite $a \times b$ si le produit est défini.*
3. *αf, où $\alpha \in \mathbb{R}^*$, admet la limite αa.*
4. *$\frac{1}{f}$, si elle est définie, admet la limite $\frac{1}{a}$ si l'inverse de a est défini.*

De cette proposition et des limites de $x \mapsto a$ en $\{+\infty, -\infty, 0_+, 0_-\}$, on tire toutes les limites dont on a besoin.

Exercice 5 :
Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de $P(x) = x^2 + 3x + 7$ et $Q(x) = x^3 + 2x - 1$. Donner celles en $+\infty$ et $-\infty$ de $\frac{P}{Q}$.

Exercice 6 : Soient $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ et $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0$ deux polynômes de degrés n et m exactement (donc $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$). Calculer en fonction de a_n et b_m, les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de P et $\frac{P}{Q}$.

Exercice 7 : Déterminer les limites en $+\infty$, en $-\infty$ et à gauche et à droite des points où elles ne sont pas définies, des fonctions :

$$\frac{x-2}{x-1} \qquad \frac{x-2}{x^2-x-2} \qquad \frac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \qquad \frac{2x^2-4x-6}{x-1}$$

6 Dérivée d'une fonction

6.1 Taux d'accroissement et dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et x et x_0 deux points **distincts** de I. Le *taux d'accroissement* de f entre x et x_0 est :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Géométriquement c'est la *pente* de la *corde* passant par les points de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$.
Si :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \in \mathbb{R}$$

on dit que f est *dérivable* en x_0 et l'on note $f'(x_0)$ la limite.
En ce cas les cordes passant par les points de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ tendent quand x tend vers x_0 vers la *tangente* au graphe de f en x_0. Sa pente est $f'(x_0)$.

Equation de la tangente en un point d'une courbe : Si la fonction f est dérivable en x_0, l'équation de la droite tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$ est

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

(le coefficient directeur de la tangente est $f'(x_0)$ et cette droite passe par le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$)

6.2 Fonctions de classe C^∞

Si f est *dérivable sur I*, c'est à dire en tout point de I, on note $f' : x \mapsto f'(x)$ la *fonction dérivée* de f sur I.
Si f' est continue, on dit que f est de *de classe* C^1.

Si f' est dérivable, on note sa dérivée f", et on l'appelle *dérivée seconde* de f. Si f" est continue, on dit que f est de *de classe* C^2.
On définit ainsi, de proche en proche, dérivée n.^{ème} $f^{(n)}$ de f et *classe* C^n.

Enfin une fonction indéfiniment dérivable est dite *de classe* C^∞.
Les polynômes et les fractions rationnelles sont de classe C^∞.

6.3 Calcul des dérivées

Pratiquement, pour calculer les dérivées des fonctions usuelles, on utilise :

1. Le très simple fait que la dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle, et que la dérivée de la fonction $f(x) = x$ est la fonction constante égale à 1.
2. Des propriétés algébriques sur les fonctions dérivables : si f et g sont des fonctions définies et dérivables sur l'intervale I, et si c est une constante :

$$(cf)' = cf'$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Si de plus g ne s'annule pas sur I :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

6.4 Théorème des accroissements finis

C'est l'un des théorèmes les plus importants de l'Analyse. Il est hors de question de le démontrer mais il est bon de le connaître :

Théorème 2 (Théorème des accroissements finis) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable, I intervalle, et a et b deux points de I, $a < b$. Alors :*
il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Il en découle en particulier le résultat suivant sur la monotonie d'une fonction dérivable :

Proposition 2 *Soit f définie et dérivable sur un intervalle I :*
- *Si* $f' \geq 0$ *sur I, f est croissante sur I.*
- *Si* $f' > 0$ *sur I, f est strictement croissante sur I.*
- *Si* $f' \leq 0$ *sur I, f est décroissante sur I.*
- *Si* $f' < 0$ *sur I, f est strictement décroissante sur I.*

D'où les *tableaux de variation* des fonctions.

6.5 Extremums locaux

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle **ouvert**, et $x_0 \in I$.
x_0 est un *minimum local* si il existe un sous-intervalle ouvert J de I contenant x_0 tel que :

$$\forall x \in J \quad f(x) \geq f(x_0)$$

x_0 est un *maximum local* si :

$$\forall x \in J \quad f(x) \leq f(x_0)$$

(On impose à I d'être ouvert pour éliminer le cas où x_0 serait l'une des extrémités de I.)
x_0 est un *extremum local* si x_0 est un minimum ou un maximum local.

Proposition 3 *Si f est dérivable sur I, et si* x_0 *est un extremum local, alors* $f'(x_0) = 0$.

La réciproque est fausse : voir la fonction $f(x) = x^3$ en 0.

Proposition 4 *Si f est dérivable sur I et si* f' *s'annule en* x_0 *en changeant de signe alors* x_0 *est un extremum local .*

Remarque : Faire les deux tableaux de variation possible autour du point x_0.

6.6 Exercices

Exercice 8 : Etablir pour $a > 0$, puis pour $a < 0$ le tableau de variation de la *fonction affine* :

$$f(x) = ax + b$$

Exercice 9 : Signe du trinôme du second degré

1. Établir le tableau de variation de f lorsque $a > 0$, puis lorsque $a < 0$
2. On suppose $\Delta < 0$. Où se situe (par rapport à l'axe des x) le graphe de f si $a > 0$? Faire un dessin sommaire. Que peut on en déduire pour le signe de $ax^2 + bx + c$? Mêmes questions lorsque $a < 0$.
3. Mêmes questions lorsque $\Delta = 0$. Le dessin doit dans les deux cas faire apparaître $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$
4. On suppose maintenant $\Delta > 0$. Mêmes questions. Le dessin doit dans les deux cas faire apparaître l'axe des x et les deux racines x_1 et x_2 de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Exercice 10 : Terminer l'étude des fonctions :

$$f(x) = \frac{x-2}{x-1} \qquad f(x) = \frac{x-2}{x^2-x-2} \qquad f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \qquad f(x) = \frac{2x^2-4x-6}{x-1}$$

Exercice 11 : Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = 4x^2 - 3$ au point d'abscisse -1.

Exercice 12 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$. Donner le tableau de variations de f. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$ en fonction de la valeur de a.

Exercice 13 : On veut enclore, le long d'une rivière, avec 1000 mètres de clôture, un champs rectangulaire d'aire maximum (aucune clôture n'est nécessaire le long de la rivière). Quelles sont les dimensions du champs obtenu ? Quelle est son aire ?

Exercice 14 : Le point 1 est-il un minimum local, un maximum local, ou ni l'un ni l'autre pour la fonction :

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 14x + 11$$

7 Points d'inflexion

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle ouvert, de classe C^2 (au moins). Si en $x_0 \in I$, f" s'annule en changeant de signe x_0 est un *point d'inflexion* :

- f" était d'abord négative : f' était décroissante, la courbe était *concave*, Elle devient positive : f' est alors croissante, la courbe devient *convexe*
- Ou le contraire : f" était d'abord positive : la courbe était *convexe*. Elle devient négative : la courbe devient *concave*

Exercice 13 : Déterminer les points d'inflexion de la fonction :

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 15$$

Exercice 14 : Soit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ un polynôme de degrés n exactement ($a_n \neq 0$).

1. Si $n = 1$ ou 2, montrer que f n'a aucun point d'inflexion.
2. Si $n = 3$, montrer que f a toujours un et un seul point d'inflexion.
3. Si $n = 4$, combien f peut-elle avoir de points d'inflexion. Exemples (simples).
4. Même question pour $n = 5$.

8 Asymptotes

Si f admet au point $a \in \mathbb{R}$ une limite à droite ou à gauche égale à $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que le graphe de f admet en a une *asyptote verticale*.
Si f admet en $+\infty$ ou $-\infty$ une limite finie $b \in \mathbb{R}$, on dit que le graphe de f admet une *asyptote horizontale*.
Si le graphe de f tend à se confondre lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ avec celui de la fonction **affine** $g(x) = ax + b$ on dit que le graphe de f admet une *asyptote oblique*.

Pratiquement, dans les exercices :

- Soit on vous demande gentiment d'écrire f sous la forme $f(x) = ax + b + g(x)$ et l'on vous demande d'étudier : $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.
- Soit :
  1. On cherche $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ pour trouver (éventuellement) a.
  2. Si cette limite existe on cherche $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax)$ pour trouver (éventuellement) b.

Exercice 14 : On reprend la fonction :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x - 6}{x - 1}$$

1. Montrer qu'elle admet une asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Retrouver ce résultat en calculant a, b et c tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$$

9 Entrainement personnel

Exercice 1
Donner l'ensemble de définition et calculer les dérivées des trois fonctions suivantes :

$f(x) = x^2 - 5x + 4 \qquad g(x) = \dfrac{5 - x}{x - 4} \qquad h(x) = \dfrac{6}{x^2 + 2}$

Exercice 2
Soit la fonction $f(x) = \dfrac{2x}{x - 3}$.
Faire l'étude de cette fonction : Ensemble de définition , limites aux bornes, dérivée, tableau de variation.
Préciser les asymptotes et donner une équation de la tangente au point d'abscisse 1. Faire la courbe.

Exercice 3
Le bénéfice réalisé par une entreprise est fonction de la quantité produite.
Il est donné par la formule $B(x) = 10x - x^2 - 9$ où x est la quantité produite.
Pour quelle valeur de x y a -t-il réellement bénéfice ?
Quelle quantité assure un bénéfice maximal ? Faire le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[1; 9]$.