Quelsues exercices corrigés

Exercice 1

D'un point de vue démographique, la population d'un village diminue de 2% par an.

a) Exprimer la population de l'année $n+1$, u_{n+1} en fonction de la population de l'année n que l'on note u_n.

b) Donner la nature de la suite u_n.

c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

d) Quel est le sens de variation de la suite u_n ?

Correction

a) $u_{n+1} = u_n - \frac{2}{100}un = u_n(1 - \frac{2}{100}) = un \times 0,98$.

b) u_n est donc une suite géométrique de raison $0,98$.

c) Si on note u_0 le premier terme de cette suite on a $u_n = u_0 \times 0,98^n$.

d) Comme la raison est inférieure à 1 la suite est décroissante.

En effet $u_{n+1} - u_n = u_0 \times 0,98^{n+1} - u_0 \times 0,98^n = u_0 \times 0,98^n(0,98-1) = u_0 \times 0,98^n \times (-0,02)$ qui est un nombre négatif.

Exercice 2 Démontrer par récurrence :

$\sum_{k=0}^{n} 5^k = \frac{5^{n+1}-1}{4}$.

Correction

* On vérifie que la formule est vraie pour $n = 0$.

En effet $\sum_{k=0}^{0} 5^k = 5^0 = 1$ et $\frac{5^{0+1}-1}{4} = \frac{5-1}{4} = 1$.

* On suppose la formule vraie au rang n et on regarde ce que cela donne au rang $n+1$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} 5^k = \sum_{k=0}^{n} 5^k + 5^{n+1} = \frac{5^{n+1}-1}{4} + 5^{n+1} = \frac{5^{n+1}-1}{4} + \frac{4 \times 5^{n+1}}{4} = \frac{5^{n+1}-1+4\times 5^{n+1}}{4} = \frac{5\times 5^{n+1}-1}{4} = \frac{5^{n+2}-1}{4}.$$

On a donc prouvé la formule au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence cette formule est vraie pour tout n entier naturel.

Exercice 3

Etant donnés une droite Δ et un point O n'appartenant pas à Δ. On place 4 points A,B,C,D sur Δ et on les relie au point O. On peut alors nommer 6 triangles dont un sommet est O. On place 5 points sur Δ et on les relie au point O. On peut alors nommer 10 triangles dont un sommet est O.

Si on place 10 points sur Δ et si on les relie tous au point O combien peut-on nommer de triangles dont un sommet est O ?

Correction

Après avoir fait un dessin on voit qu'il suffit de choisir 2 points sur la droite (en plus de O) pour fabriquer un triangle.

Si il y a n points sur la droite la solution est donc C_n^2. En effet $C_4^2 = \frac{4\times 3}{2\times 1} = 6$ et $C_5^2 = \frac{5\times 4}{2\times 1} = 10$. Donc $C_{10}^2 = \frac{10\times 9}{2\times 1} = 45$.

Le meilleur entrainement est d'apprendre le cours, de refaire les exemples du cours et les exercices des feuilles 2-3 et les deux premières parties de la feuille 4.