Limites et comportement asymptotique

I. Opérations et limites

f et g sont deux fonctions données ; a désigne un nombre réel, ou +õ ou -õ ; l et l' deux nombres réels.

1) Limite d'une somme.

$\lim_{x \to a} f(x)$	l	l	l	+õ	-õ	+õ
$\lim_{x \to a} g(x)$	l'	+õ	-õ	+õ	-õ	-õ
$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$	l + l'	+õ	-õ	+õ	-õ	? ? ?

2) Limite d'un produit.

$\lim_{x \to a} f(x)$	l	l (not=)0	±õ	0
$\lim_{x \to a} g(x)$	l'	±õ	±õ	±õ
$\lim_{x \to a} (f(x).g(x))$	l × l'	±õ	±õ	? ? ?

3) Limite d'un quotient.

$\lim_{x \to a} f(x)$	l	lý0	l	±õ	0	±õ
$\lim_{x \to a} g(x)$	l'ý0	0	±õ	l'	0	±õ
$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	±õ	0	±õ	? ? ?	? ? ?

4) Théorèmes :

1) La limite en plus ou moins l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

2) La limite en plus ou moins l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite du rapport de ses termes de plus haut degré.

II. Limite par composée et comparaison

1) Limite d'une fonction composée.

Soit a, l et l' des nombres réels ou ±õ

Soit u et g deux fonctions dont la composée gou existe sur un intervalle contenant le nombre réel a, ou de borne a.

Si $\lim_{x \to a} u(x) = l$ et si $\lim_{X \to l} g(X) = l'$ alors $\lim_{x \to a} gou(x) = l'$

Exemple :

Soit f(x) = $\sqrt{4+\frac{1}{x}}$ définie sur] 0 ; $+\infty$ [.

Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

u(x) = $4+\frac{1}{x}$; g(x) = $\sqrt{x}$; f(x) = gou(x)

- En 0 :

$\lim\limits_{x\to 0} u(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{X\to +\infty} g(x) = +\infty$ $\quad$ donc $\lim\limits_{x\to 0} gou(x) = +\infty$ $\quad$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

- En $+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} u(x) = 4$ $\quad$ $\lim\limits_{X\to 4} g(x) = 2$ $\quad$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} gou(x) = 2$ $\quad$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$

2)Limite par comparaison

- Soit les fonctions f, g et h définies sur un intervalle I =] a ; $+\infty$[.
  Si pour tout x de I, h(x) ≤ f(x) et si $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
  Si pour tout x de I, f(x) ≤ g(x) et si $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

- Soit les fonctions f, g et h définies sur un intervalle I =] a ; $+\infty$[et soit l un nombre réel.
  Si pour tout x de I, h(x) ≤ f(x) ≤ g(x) et si $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = l = \lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l$.

On a des théorèmes analogues pour I =] $-\infty$; a[et les limites en $-\infty$ ou en a.

Exemple :
Soit une fonction f définie sur] 0 ; $+\infty$ [et telle que pour tout x de] 0 ; $+\infty$ [:
$\frac{1}{x+1} \le f(x) \le \frac{1}{x}$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

On sait que $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; de plus $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$.
Comme $\frac{1}{x+1} \le f(x) \le \frac{1}{x}$ pour tout x de] 0 ; $+\infty$ [, on peut conclure que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ grâce au théorème d'encadrement.

III. Asymptotes

1) Asymptote verticale

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

On dit que la droite d'équation x = a est asymptote verticale à la courbe.
Le réel a est souvent une borne ouverte de l'ensemble de définition de f.

2)Asymptote horizontale

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = l$.

On dit que la droite y = l est une asymptote horizontale à la courbe en $\pm\infty$.

3)Asymptote oblique

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique a la courbe représentative de f en $\pm\infty$.

<u>Remarque :</u>
Si la fonction f peut s'écrire $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varepsilon(x) = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique a la courbe représentative de f en $\pm\infty$.

L'étude du signe de la différence $f(x) - (ax + b)$ indique la position relative de la courbe par rapport à la droite d'équation $y = ax + b$.
Si $f(x) - (ax + b) > 0$, la courbe est au dessus de l'asymptote.
Si $f(x) - (ax + b) < 0$, la courbe est en dessous de l'asymptote.

<u>Exemple :</u>
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = x + 3 - \dfrac{1}{x-1}$
La droite d'équation $y = x + 3$ est donc une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $\pm\infty$.