1. VOCABULAIRE DE BASE

a. Graphe

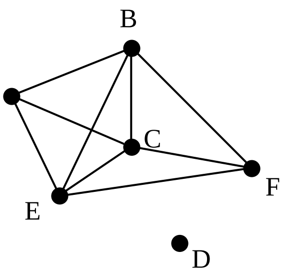
Exemple :

A ; B ; C ; D ; E et F sont 6 poissons.
Dans le tableau ci-dessous, une croix indique que les poissons ne peuvent pas cohabiter dans le même aquarium.

	A	B	C	D	E	F
A		×	×		×	
B	×		×		×	×
C	×	×			×	×
D						
E	×	×	×			×
F		×	×		×	

Représenter la situation par un schéma (G) où :

- Chaque poisson est représenté par un point.
- 2 poissons qui ne peuvent pas cohabiter sont reliés.



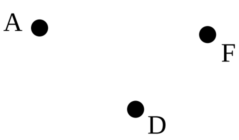
(G)

Définitions :

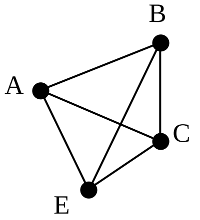
- **i.** Le schéma (G) est un **graphe**.
- **ii.** Les points A ; B ; C ; D ; E et F sont les **sommets** du graphe.
- **iii.** L'**ordre** d'un graphe est le nombre total de sommets, ici 6.
- **iv.** Les segments reliant deux sommets sont des **arêtes**.
- **v.** Deux sommets sont **adjacents** lorsqu'ils sont reliés par une arête.
- **vi.** Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
- **vii.** Un sommet est **isolé** lorsqu'il n'est relié à aucun autre sommet.
- **viii.** Un **sous graphe** (G') de (G) est un graphe composé de certains sommets et de toutes les arêtes qui relient ces sommets.
- **ix.** Un sous graphe (G_1) de (G) est **stable** lorsqu'il ne contient aucune arête.
- **x.** Un sous graphe (G_2) de (G) est **complet** lorsque ses sommets sont deux à deux adjacents.

Exemple :

- « Poissons »



(G_1) est un sous graphe stable de (G)



(G_2) est un sous graphe complet de (G)

b. Relation entre le nombre d'arêtes et la somme des degrés

Propriété :

La somme S des degrés d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes a du graphe.

- $S = 2 \times a$.

Exemple :

- « Poissons »

Soit S la somme des degrés et a le nombre d'arêtes :
On a : $S = 3 + 4 + 4 + 0 + 4 + 3 = 18$ d'où : $a = 18 \div 2 = 9$.

Exercice :

Peut-on organiser un tournoi d'échecs entre 5 joueurs de telle sorte que chaque participant joue 3 parties ?

Supposons que l'organisation d'un tel tournoi soit possible.
Imaginons le tournoi représenté par un graphe d'ordre 5 où :
Chaque joueur est représenté par un sommet.
Deux joueurs qui s'affrontent sont reliés.
On aurait : $S = 5 \times 3 = 15$.
Par conséquent, on aurait : $a = 15 \div 2 = 7{,}5$!

c. Matrice associée à un graphe

Définition :

On numérote les sommets d'un graphe (G) d'ordre n.
La **matrice associée au graphe** (G) est la matrice à n lignes et à n colonnes où le terme a_{ij} situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.

Exemple :

- « Poissons »

On numérote les sommets dans l'ordre alphabétique. La matrice associée au graphe (G) est la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propriété :

La matrice associée à un graphe est symétrique.

Remarque :

Il existe plusieurs manières de numéroter les sommets d'un graphe donc la matrice associée à un graphe n'est pas unique.

2. COLORATION D'UN GRAPHE ET NOMBRE CHROMATIQUE

a. Coloration d'un graphe

Définition :

Colorer un graphe consiste à affecter une couleur à chacun de ses sommets de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

Remarque :

La coloration d'un graphe est toujours possible.
En effet, si (G) est un graphe d'ordre n, on peut toujours le colorer en utilisant n couleurs distinctes.

b. Nombre chromatique

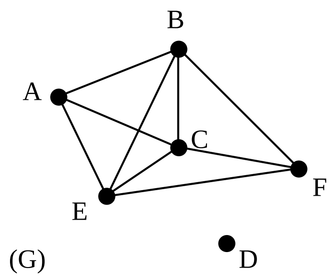
Définition :

Le **nombre chromatique** d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs permettant de le colorer.

Exemple :

- « Poissons »

Sommet	Couleur	Remarque
A	(1)	
B	(2)	(1) interdite
C	(3)	(1) et (2) interdites
D	(1)	
E	(4)	(1), (2) et (3) interdites
F	(1)	

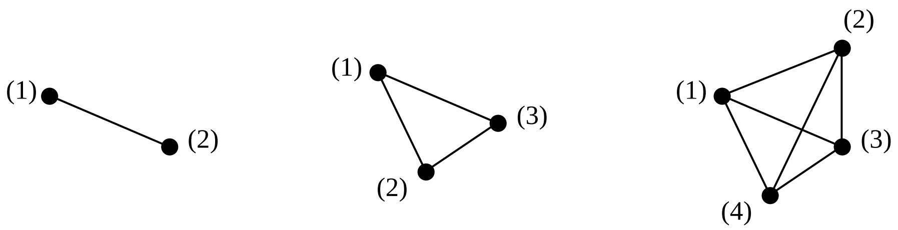


Le nombre chromatique est 4.

c. Nombre chromatique d'un graphe complet

Propriété :

Le nombre chromatique d'un graphe complet d'ordre n est n.



d. Algorithme glouton

L'algorithme glouton permet de colorer un graphe en réduisant le nombre de couleurs.

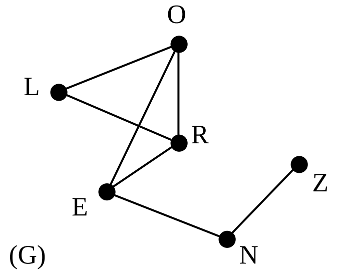
Méthode :

On considère les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leurs degrés et on utilise, lorsque c'est possible, une couleur déjà utilisée, celle affectée du plus petit numéro.

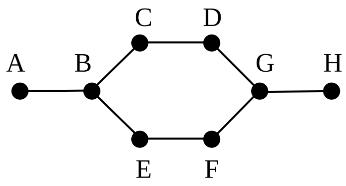
Exemple :

Colorer le graphe (G) ci-contre :

Sommet	Degré	Couleur
E	3	(1)
O	3	(2)
R	3	(3)
L	2	(1)
N	2	(2)
Z	1	(1)



Remarque :
L'algorithme glouton ne donne pas nécessairement le nombre chromatique.
Par exemple, en colorant le graphe ci-dessous par l'algorithme glouton, on obtient une coloration avec 3 couleurs, alors que le nombre chromatique est 2.



e. Encadrement du nombre chromatique

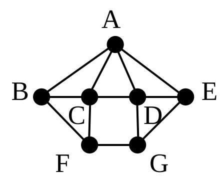
Propriété :

Si Δ est le plus grand degré des sommets d'un graphe, alors le nombre chromatique de ce graphe est inférieur ou égal à $\Delta + 1$.

Remarque :
Si r est l'ordre d'un sous graphe complet d'un graphe, alors le nombre chromatique de ce graphe est supérieur ou égal à r.

Exercice :

Trouver le nombre chromatique c du graphe ci-contre.



On a : $\Delta = 4$ donc $c \leq 5$.
Les points A, B et C forment un sous graphe complet d'ordre 3 donc $c \geq 3$.
Par conséquent : $3 \leq c \leq 5$.
En fait : $c = 4$.

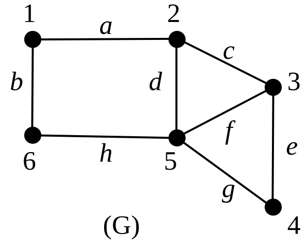
3. CHAINES ET CYCLES

a. Chaîne

Définitions :

- **i.** Une **chaîne** d'un graphe est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet soit adjacent au suivant.
- **ii.** La **longueur** d'une chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la composent.
- **iii.** Une chaîne est **fermée** lorsque son origine et son extrémité sont confondues.
- **iv.** La **distance** entre deux sommets d'un graphe est la plus petite longueur des chaînes qui les relient.
- **v.** Le **diamètre** d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets.

Exemple :



(G)

- Soit (G) le graphe ci-contre.

La liste 1-2-3-5-2-3, ou *a*/*c*/*f*/*d*/*c*, est une chaîne de longueur 5.
La liste 1-2-6 n'est pas une chaîne.
La liste 1-2-3-5-2-1 est une chaîne fermée.
La distance entre les sommets 1 et 5 vaut 2.
Le diamètre du graphe (G) vaut 3.

b. Cycle

Définition :

Une chaîne fermée est un **cycle** lorsqu'elle est composée d'arêtes toutes distinctes.

Exemple :

- Soit (G) le graphe précédent.

La liste 1-2-3-5-6-1, ou *a*/*c*/*f*/*h*/*b*, est cycle.

c. Chaîne eulérienne et cycle eulérien

Définitions :

- **i.** Une chaîne est **eulérienne** lorsqu'elle contient une et une seule fois chaque arête du graphe.
- **ii.** Un **cycle eulérien** est une chaîne eulérienne fermée.

Exemple :

- Soit (G) le graphe précédent.

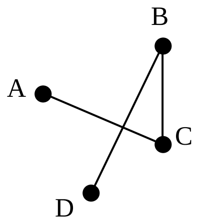
La liste 2-1-6-5-2-3-5-4-3, ou *a*/*b*/*h*/*d*/*c*/*f*/*g*/*e*, est une chaîne eulérienne.
Le graphe (G) ne contient pas de cycle eulérien.

d. Graphe connexe

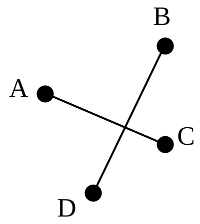
Définition :

Un graphe est **connexe** lorsqu'il existe une chaîne reliant deux sommets quelconques du graphe.

Exemples :



(G_1) est un graphe connexe



(G_2) est un graphe non connexe

e. Théorème d'Euler

Propriété :

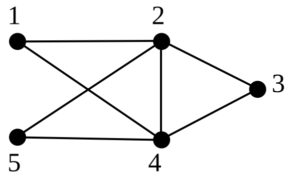
i. Pour qu'un graphe connexe (G) admette un cycle eulérien, il faut et il suffit que tous les sommets de (G) soient de degré pair.

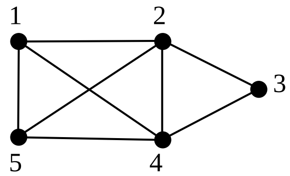
ii. Pour qu'un graphe connexe (G) admette une chaîne eulérienne d'extrémités A et B, il faut et il suffit que les sommets A et B soient les seuls sommets de (G) de degré impair.

Exemple :

- Soient (G_1) et (G_2) les graphes ci-dessous :

(G_1)



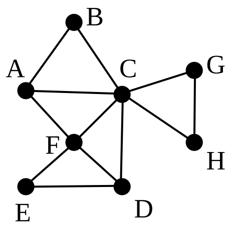


(G_2)

Les graphes (G_1) et (G_2) sont connexes.
Tous les sommets du graphe (G_1) sont de degré pair donc (G_1) admet un cycle eulérien, par exemple la liste : 1-4-5-2-4-3-2-1.
Seuls les sommets 1 et 2 du graphe (G_2) sont de degré impair donc (G_2) admet une chaîne eulérienne, par exemple la liste : 1-4-5-1-2-3-4-2-5.

Exercice :

Montrer que le graphe ci-dessous admet une chaîne eulérienne et en construire une.



Le graphe est connexe et seuls les sommets A et D sont de degré impair.
Le graphe admet donc une chaîne eulérienne d'extrémités A et D.

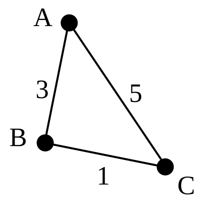
On écrit une chaîne d'origine A et d'extrémité D : par exemple A-F-D.
On lui adjoint une chaîne fermée d'origine A : par exemple A-B-C-A, une chaîne fermée d'origine D : par exemple D-E-F-C-D, une chaîne fermée d'origine C : par exemple C-G-H-C.
On obtient la chaîne eulérienne : A-B-C-G-H-C-A-F-D-E-F-C-D.

4. GRAPHES PONDERES ET ALGORITHME DE DIJKSTRA

a. Graphe pondéré

Définitions :

i. Un **graphe pondéré** est un graphe dont les arêtes sont affectées de coefficients positifs.
ii. Le **poids** d'une chaîne est la somme des coefficients affectés aux arêtes qui composent la chaîne.
iii. Une **plus courte chaîne** entre deux sommets est la chaîne de poids minimum, parmi toutes celles qui relient.



Exemple :
Sur le graphe ci-contre, une plus courte chaîne entre A et C est A – B – C de poids 4.

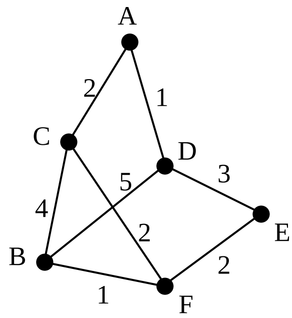
b. Algorithme de Dijkstra

L'algorithme de Dijkstra permet de trouver une plus courte chaîne entre deux sommets.

Exercice :

On considère le graphe pondéré ci-dessous. Trouver une plus courte chaîne reliant A et B.

Etape	A	C	D	E	F	B	Sommet sélectionné	Poids définitif
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	A	0
2	‖	2(A)	1(A)	∞	∞	∞	D	1
3	‖	2(A)	‖	4(D)	∞	6(D)	C	2
4	‖	‖	‖	4(D)	4(C)	6(D)	E	4
5	‖	‖	‖	‖	4(C)	6(D)	F	4
6	‖	‖	‖	‖	‖	5(F)	B	5



1ère étape :
Le sommet de départ A est affecté du poids provisoire 0 et les autres sommets du poids provisoire ∞.
On sélectionne le sommet A et on fixe son poids provisoire.
Etapes suivantes :
Tant que tous les sommets n'ont pas un poids définitif, ou que le sommet d'arrivée B n'est pas affecté du plus petit poids provisoire.
Pour tout sommet T ' non sélectionné et adjacent au dernier sommet sélectionné T, on calcule la somme *s* du poids définitif affecté à T et du poids de l'arête reliant T à T '.
Si cette somme *s* est inférieure au poids provisoire affecté à T ', on affecte T ' du poids provisoire *s* que l'on note *s*(T) pour indiquer que T est le sommet qui précède T '.
Parmi les sommets de poids provisoire, on sélectionne un sommet de poids provisoire minimum et on fixe son poids provisoire.

On obtient une plus courte chaîne entre A et B en l'écrivant de la droite vers la gauche ainsi :
On écrit le sommet d'arrivée B puis le sommet inscrit au plus bas de la colonne B, c'est-à-dire F, puis le sommet inscrit au plus bas de la colonne F, c'est-à-dire C et ainsi de suite jusqu'au sommet de départ A.
On obtient : A – C – F – B.

5. GRAPHES ORIENTES

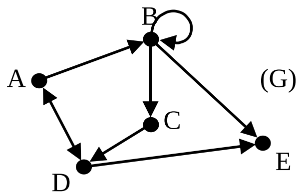
a. Graphe orienté

Définitions :

- **i.** Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes sont orientées.
- **ii.** Le sommet A et le sommet B d'une arête orientée reliant A à B s'appellent respectivement l'**origine** et l'**extrémité** de l'arête orientée A – B.
- **iii.** Une **chaîne orientée** d'un graphe orienté est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet soit relié au suivant par l'arête orientée dont il est l'origine.

Exemple :

- Sur le graphe ci-contre :



L'arête orientée D – E a pour origine D et pour extrémité E.
L'arête orientée B – B est une boucle.
Il y a deux arêtes orientées reliant les sommets A et D.
Une chaîne orientée d'origine A et d'extrémité C contient nécessairement le sommet B.

Remarque :

Chaque notion définie pour un graphe non orienté a un équivalent pour un graphe orienté.

b. Matrice associée à un graphe orienté

Définition :

On numérote les sommets d'un graphe orienté (G) d'ordre n.
La **matrice associée au graphe orienté** (G) est la matrice à n lignes et à n colonnes où le terme a_{ij} situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal au nombre d'arêtes orientées reliant le sommet i à j.

Exemple :

On numérote les sommets du graphe (G) de l'exemple précédent dans l'ordre alphabétique. La matrice associée au graphe (G) est la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque :

La matrice associée à un graphe orienté n'est pas symétrique.

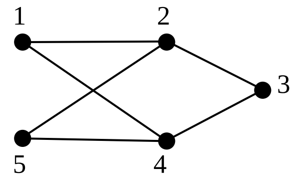
6. PUISSANCE NIEME D'UNE MATRICE ASSOCIEE ET NOMBRE DE CHAINES DE LONGUEUR N

a. Puissance nième de la matrice associée à un graphe

Exemple :

- Soient (G) le graphe ci-contre et M sa matrice associée :

Expliciter M, M^2 et M^3.



On a : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Nombre de chaînes de longueur *n* reliant deux sommets d'un graphe

Propriété :

Soit M la matrice associée à un graphe (G) et $n \in \mathbf{N}^*$.
Le terme de la matrice M^n situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal au nombre de chaînes de longueur n reliant le sommet i au sommet j.

Démonstration :
Par récurrence sur n.

1ère étape :
Par définition, le terme a_{ij} de la matrice M situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal au nombre d'arêtes reliant i à j. Il est bien égal au nombre de chaînes de longueur 1 reliant i à j.

2ème étape :
On suppose que le terme b_{ij} de la matrice M^n situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal au nombre de chaînes de longueur n reliant i à j.
Soit c_{ij} le terme de la matrice M^{n+1} situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.
Puisque $M^{n+1} = M \times M^n$, alors $c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + ... + a_{ik} \times b_{kj} + ... + a_{ip} \times b_{pj}$.
Si $a_{ik} \times b_{kj} \neq 0$, alors $a_{ik} = 1$ et $b_{kj} = q$ où q est le nombre non nul de chaînes de longueur n reliant k à j. Il existe alors q chaînes de longueur $n + 1$ reliant i à j et dont le deuxième sommet est k.
Si $a_{ik} \times b_{kj} = 0$, alors $a_{ik} = 0$ ou $b_{kj} = 0$. Il n'existe pas de chaîne de longueur $n + 1$ reliant i à j et dont le deuxième sommet est k.
En considérant un à un les nombres k, c_{ij} est le nombre de chaînes de longueur $n + 1$ reliant i à j.

Conclusion :
Le terme cb_{ij} de la matrice M^{n+1} situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal au nombre de chaînes de longueur $n + 1$ reliant i à j.

Exemple :

- Sur le graphe (G) de l'exemple précédent :

Il n'existe aucune chaîne de longueur 3 reliant le sommet 1 au sommet 3.
Il existe 6 chaînes de longueur 3 reliant le sommet 1 au sommet 4.