Mathématiques **2010-2011**

Feuille d'exercices 3

Exercice 1

Soit $f(x,y) = 4x^2 - xy + y^2 - x^3$.

Trouver tous les points extrémaux de f et dire pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum, d'un minimum ou d'un col.

Exercice 2

Soit la fonction utilité définie par : $U(x,y) = xy$.

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction.

b) Déterminer les dérivées partielles de premier et de second ordre de la fonction U.

c) On cherche à maximaliser cette utilité sous la contrainte budgétaire $2x + 3y = 12$.

Trouver, s'il existe, cet extremum. Justifier votre réponse.

Tracer sur le même graphique la droite représentant la contrainte et la ligne de niveau correspondant au maximum d'utilité.

Prouver que la droite de contrainte est la tangente à la ligne de niveau.

d) Fabriquer une fonction ayant pour seule variable y en utilisant la contrainte et chercher son extremum en étudiant cette fonction.

Exercice 3

Soit la fonction utilité définie par : $U(x,y) = x\sqrt{y}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction.

b) Déterminer les dérivées partielles de premier et de second ordre de la fonction U.

c) On cherche à maximaliser cette utilité sous la contrainte budgétaire $2x + 3y = 9$.

Trouver, s'il existe, cet extremum. Justifier votre réponse.

d) Fabriquer une fonction ayant pour seule variable y en utilisant la contrainte et chercher son extremum en étudiant cette fonction.

Exercice 4

Une firme produit des appareils dans deux usines différentes. Les coûts totaux de production pour les deux usines sont respectivement :

$CT_1 = 200 + 6q_1 + 0,03q_1^2$ et $CT_2 = 150 + 10q_2 + 0,02q_2^2$

où q_1 et q_2 représentent le nombre d'appareils produits dans chaque usine. La firme s'est engagée à livrer 100 appareils à une entreprise. Les frais de transport par appareil sont de 4 euros pour les livraisons à partir de la première usine et de 2euros pour les livraisons à partir de la deuxième usine. Les frais de transport sont supportés par la firme productive.

a) Déterminer la fonction coût total $CT(q_1, q_2)$.

b) Calculer le nombre d'appareils que doit produire la firme dans chacune des usines afin de minimiser le coût total de production.

Exercice 5

Une boîte sans couvercle a la forme d'un parallélépipède de dimension x, y, z.

Sachant que sa surface latérale vaut 3 unités de surface, quelles valeurs de x, y et z faut-il choisir pour que son volume soit maximal ?

Exercice 6

Un consommateur dispose d'un revenu mensuel $R = 2500$ euros. Il va l'utiliser pour l'achat de deux biens A et B dont les prix unitaires sont : $P_A = 500$ et $P_B = 250$.

On appelle X_A et X_B les quantités des biens achetées.

L'achat de A et B procure au consommateur une utilité U estimée par la formule $U = 2X_AX_B$. Le consommateur est soumis à une contrainte de revenu.

a) Représenter graphiquement la contrainte et quelques lignes de niveau de l'utilité.

b) Déterminer les quantités X_A et X_B qui rendent maximale l'utilité.